Απαντήσεις Μαθηματικών Γενικής Παιδείας 20-5-2015

Α1: Θεωρία σελίδα 31.

Α2: Ορισμός σελίδα 22.

Α3: Ορισμός σελίδα 87.

Α4: α) Λ, β) Σ, γ) Λ, δ) Λ, ε) Σ.

Β1:

- ✓ $(3x-1)(8x^2-6x+1)=0 \overset{(\Delta=4)}{\Longrightarrow} x_1=\frac{1}{3}$ ή $x_{2,3}=\frac{6\pm 2}{16} \Rightarrow x_1=\frac{1}{3}$ ή $x_2=\frac{1}{2}$ ή $x_3=\frac{1}{4}$.
- ✓ Ισχύει: $A\cap B \subseteq A \subseteq A\cup B \Rightarrow P(A\cap B)\le P(A) \le P(A\cup B)$, άρα έχουμε: $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$, $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$.

Β2:

- ✓ $P(A'-B')=P(A'\cap (B')')=P(A'\cap B)=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=P(A\cup B)-P(A)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$. (Με εφαρμογή του προσθετικού νόμου $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$, οπότε: $P(B)-P(A\cap B)=P(A\cup B)-P(A)$)
- ✓ Το ενδεχόμενο Δ: «πραγματοποιείται το πολύ ένα από τα Α και Β» είναι το ενδεχόμενο $(A\cap B)'$. Άρα: $P[(A\cap B)']=1-P(A\cap B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

Β3: $P[(A-B)\cup(B-A)=P(A-B)+P(B-A)=$ (αφού τα ενδεχόμενα $A-B$ και $B-A$ είναι μεταξύ τους ασυμβίβαστα) $=P(A)-P(A\cap B)+P(B-A)=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$.

Β4: $9x^2-3x-2=0 \Rightarrow x_{2,3}=\frac{3\pm 9}{18} \Rightarrow x_1=\frac{2}{3}$ ή $x_2=-\frac{1}{3}<0$ (Δ=81), άρα: $P(\Gamma)=\frac{2}{3}$.

- ✓ Αν Β και Γ ασυμβίβαστα τότε $B\cap \Gamma=\emptyset$ κι έτσι $P(B\cup\Gamma)=P(B)+P(\Gamma)=P(A\cup B)+P(A\cap B)-P(A)+P(\Gamma)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{6+3+4}{12}=\frac{13}{12}>1$. Άτοπο, οπότε δεν είναι ασυμβίβαστα.

Γ1: Είναι $f_1=0{,}1$, $f_5=0{,}3$, $f_3=\frac{a_3}{360^0}=\frac{108}{360}=\frac{3}{10}=0{,}3$.

- ✓ $f_2+f_4=\sum_{i=1}^{5} f_i-f_1-f_3-f_5=1-0{,}1-0{,}3-0{,}3=0{,}3 \Rightarrow f_4=0{,}3-f_2$. (1)
- ✓ $\bar{x}=\sum_{i=1}^{5} x_i f_i$, με x_i τις κεντρικές τιμές των δοσμένων κλάσεων, έτσι:

$14 = 9f_1 + 11f_2 + 13f_3 + 15f_4 + 17f_5 \Rightarrow 11f_2 + 15f_4 = 14 - (0{,}9 + 3{,}9 + 5{,}1) \Rightarrow 11f_2 + 15f_4 = 14 - 9{,}9 \overset{(1)}{\Rightarrow} 11f_2 + 15(0{,}3 - f_2) = 4{,}1 \Rightarrow -4f_2 = -0{,}4 \Rightarrow f_2 = 0{,}1$ και από (1): $f_4 = 0{,}2$.

Γ2: $s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2 \nu_i = \sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2 f_i = 25 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}2 + 9 \cdot 0{,}3 = 2{,}5 + 0{,}9 + 0{,}3 + 0{,}2 + 2{,}7 = 6{,}6$.

- ✓ $s = \sqrt{6{,}6} = 2{,}57$.
- ✓ $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2{,}57}{14} = 0{,}18 > 0{,}1$, άρα είναι ανομοιογενές.

Γ3: $\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{5} x_i \nu_i \Rightarrow 14 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{4} x_i \nu_i + \frac{1}{\nu}17 \cdot \nu_5 \Rightarrow 14 = \frac{1780}{\nu} + 17 \cdot 0{,}3 \Rightarrow 8{,}9 = \frac{1780}{\nu} \Rightarrow$

$$\nu = \frac{1780}{8{,}9} \Rightarrow \nu = 200.$$

Γ4: Από εφαρμογή σελίδας 99 του βιβλίου ισχύει: α) αν y_i οι τιμές που προκύπτουν αν στις x_i προσθέσουμε σταθερά c, τότε για τις νέες ισχύει: $\bar{y} = \bar{x} + c$ και $S_y = S_x$ και β) αν y_i οι τιμές που προκύπτουν αν τις x_i πολλαπλασιάσουμε με σταθερά c, τότε ισχύει: $\bar{y} = c\bar{x}$ και $S_y = |c|S_x$.

Συμπερασματικά, αν για τις νέες παρατηρήσεις έχω $y_i = \alpha x_i + \beta$, τότε θα πάρω:

$$\bar{y} = \alpha\bar{x} + \beta \text{ και } S_y = |\alpha|S_x.$$

Στην περίπτωσή μας έχουμε: $\beta_i = \frac{1}{S_\alpha}\alpha_i - \frac{1}{S_\alpha}\bar{\alpha}$, οπότε $\bar{\beta} = \frac{1}{S_\alpha}\bar{\alpha} - \frac{1}{S_\alpha}\bar{\alpha} = 0$ και $S_\beta = \left|\frac{1}{S_\alpha}\right| S_\alpha = 1$.

Δ1: Η διαγώνιος του ορθογωνίου είναι και διάμετρος του κύκλου, αφού σε διάμετρο βαίνει εγγεγραμμένη ορθή γωνία.

- ✓ Έτσι: $x^2 + y^2 = 10^2 \overset{y>0}{\Longrightarrow} y = \sqrt{100 - x^2}$, με $0 < x < 10$, για να ορίζονται τα x και y.
- ✓ $E = xy = x\sqrt{100 - x^2}$.
- ✓ Άρα: $f(x) = x\sqrt{100 - x^2}$, με $0 < x < 10$.

Δ2:

- ✓ $f'(x) = \sqrt{100 - x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{100 - x^2}}(-x^2)' = \sqrt{100 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}} = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{(10 - \sqrt{2}x)(10 + \sqrt{2}x)}{\sqrt{100 - x^2}}$.
- ✓ $f'(x) = 0 \overset{x>0}{\Longrightarrow} 10 - \sqrt{2}x = 0 \Rightarrow x = \frac{10}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = 5\sqrt{2}$.

- ✓ Το πρόσημο της f' εξαρτάται από το πρόσημο του τριωνύμου του αριθμητή της (με συντελεστή μεγιστοβάθμιου αρνητικό) για το τμήμα που είναι εντός πεδίου ορισμού και φαίνεται, όπως και η μονοτονία της f , στον παρακάτω πίνακα.

x	0	$5\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗		↘

- ✓ Για $x = 5\sqrt{2}$ η συνάρτηση του εμβαδού παρουσιάζει ολικό μέγιστο κι έχουμε $y = \sqrt{100-(5\sqrt{2})^2} = 5\sqrt{2} = \chi$, άρα το ορθογώνιο γίνεται τετράγωνο.

Δ3: $$lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} lim_{x\to 0}\frac{\left[(1+x)\sqrt{100-(1+x)^2}-\sqrt{99}\right]\cdot\left[(1+x)\sqrt{100-(1+x)^2}+\sqrt{99}\right]}{98x\left[(1+x)\sqrt{100-(1+x)^2}+\sqrt{99}\right]} =$$

$$= lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^2[100-(1+x)^2]-99}{98x\left[(1+x)\sqrt{100-(1+x)^2}+\sqrt{99}\right]} = -lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^4-100(1+x)^2+99}{98x\left[(1+x)\sqrt{100-(1+x)^2}+\sqrt{99}\right]} =$$

$$= -lim_{x\to 0}\frac{[(1+x)^2-1]\cdot[(1+x)^2-99]}{98x\left[(1+x)\sqrt{100-(1+x)^2}+\sqrt{99}\right]} = -\lim_{x\to 0}\left(\frac{[(1+x)^2-99]}{98}\cdot\frac{(1+x-1)(1+x+1)}{x\left[(1+x)\sqrt{100-(1+x)^2}+\sqrt{99}\right]}\right) =$$

$$-\frac{-98}{98}\cdot\frac{2}{2\sqrt{99}} = \frac{1}{\sqrt{99}}.$$

Δ4: Αφού η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα αν $0 < x < 5\sqrt{2}$, αρκεί να δειχτεί ότι:

$$0 < \frac{P(A-B)}{\sqrt{100-(P(A))^2}} \le \frac{P(A)}{\sqrt{100-(P(A-B))^2}} < 5\sqrt{2}, (1)$$

- ✓ $\boldsymbol{A - B \subseteq A \Rightarrow 0 \le P(A-B) \le P(A) \le 1}$, ***(2)***
- ✓ $\boldsymbol{0 \le (P(A-B))^2 \le (P(A))^2 \le 1 \Rightarrow \sqrt{99} \le \sqrt{100-(P(A))^2} \le \sqrt{100-(P(A-B))^2} \le 10 \Rightarrow}$ $\boldsymbol{\frac{1}{10} \le \frac{1}{\sqrt{100-(P(A-B))^2}} \le \frac{1}{\sqrt{100-(P(A))^2}} \le \frac{1}{\sqrt{99}}}$ ***.(3)***

Οι αριθμοί $\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-(P(A))^2}}$ και $\frac{P(A)}{\sqrt{100-(P(A-B))^2}}$, από τις 2 και 3 είναι γινόμενα αριθμών ανάμεσα στο 0 και το 1 και άρα είναι κι αυτοί ανάμεσα στο 0 και το 1.

Από 2 έχουμε: $\boldsymbol{P(A-B) \le P(A) \Rightarrow f\big(P(A-B)\big) \le f\big(P(A)\big) \Rightarrow}$

$\boldsymbol{P(A-B)\sqrt{100-(P(A-B))^2} \le P(A)\sqrt{100-(P(A))^2} \Rightarrow \frac{P(A-B)}{\sqrt{100-(P(A))^2}} \le \frac{P(A)}{\sqrt{100-(P(A-B))^2}}}$ **,** δηλ. η (1)**.**