# Τελευταία επανάληψη

**1.** Αν $f'(x)g(x) \neq f(x)g'(x)$ , $x \in \mathcal{R}$, με $x_1, x_2$ ρίζες της $f(x)$ , $x_1 < x_2$ και $x_3, x_4$ ρίζες της $g(x)$ , $x_3 < x_4$ ,να αποδείξετε ότι : $x_1 < x_3 < x_2 < x_4$ .

**2.** Έστω $f$, $g$ συνεχείς συναρτήσεις στο $\mathcal{R}$ και $f^2(x)(g(x) - x) = e^x$ , $x \in \mathcal{R}$.

i. να δείξετε ότι η $f$ διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x \in \mathcal{R}$.

ii. να δείξετε ότι η $C_g$ είναι πάνω από την ευθεία $y = x$ .

iii. αν $g(x) = e^x$ και $f(1) = \sqrt{\frac{e}{e-1}}$ ,να βρεθεί ο τύπος της $f$.

**3.** Να αποδείξετε ότι: $\int_{-1}^{0} \frac{x\sigma\upsilon\nu x}{\frac{1}{4}x^2 + e} dx \geq 2ln\frac{4e}{1+4e}$ .

**4.** Έστω $f$ παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και $g(x) = xf(e^{1-x} + 1)$ . Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της $C_g$ , όταν η ευθεία $(\varepsilon)$: $y = -3x + 2$ , εφάπτεται της $C_f$ στο $x_0 = 1$ .

**5.** Έστω $f$:$(-\infty, 0) \rightarrow \mathcal{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη. Να δείξετε ότι η $f$ δεν έχει σημεία καμπής, όταν ισχύει: $f^2(x) + (3 - x)f(x) - \frac{1}{2}x + \frac{9}{4} = 0$ , $x < 0$ .

**6.** Έστω $f$ :$(0, +\infty) \rightarrow \mathcal{R}$ παραγωγίσιμη. Να βρείτε τα ακρότατα της $f$, αν:

$$f^5(x) + e^{f(x)} = \ln(x+1) + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2} - ln2 , \ x > 0 .$$

**7.** Αν $f(x) = e^{x^2}$ και $g(x) = \sqrt{lnx}$ ,να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα :

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^e g(x)dx .$$

**8.** Για κάθε $x > 3$ ,να αποδείξετε ότι : $4e^{x-3} \geq (x-3)^2 e^2$ .

**9.** Έστω $f$, $g$ :$(0, +\infty) \rightarrow \mathcal{R}$ και ισχύει : $\int_1^x f(t)dt - \alpha x lnx = \int_1^x g(t)dt$ , $x > 0$ , $\alpha > 0$.

i. να βρεθεί το πρόσημο της συνάρτησης $f(x) - g(x)$ .

ii. αν ισχύει ότι $\mathrm{E}(\Omega) = \frac{2}{\mathrm{e}}$ το εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από την $C_f$ ,την $C_g$ και την ευθεία $x = 1$ ,να βρείτε το α.

**10.** Έστω $f$ παραγωγίσιμη στο [-2,2] με $f(-2)=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}f(x)dx$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (-2,2) .

**11.** Αν $f$ συνεχής στο $\mathcal{R}$ ,δείξτε ότι η συνάρτηση $h(x)=\int_{0}^{2}t^2f(xt-t)dt$ είναι συνεχής στο $x_0=1$ .

**12.** Έστω f:(-1,+∞)→ $\mathcal{R}$ συνεχής με : $f(x)\geq e^{x+1}-1$ ,(1) και $\int_{1}^{x}(\int_{2}^{t}f(u)du)dt\leq \ln\frac{2}{x+1}$ $,x>-1$ ,(2). Να βρεθεί το εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από την $C_f$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x=1\,,x=2$ .

**13.** Έστω $f:\mathcal{R}\rightarrow\mathcal{R}$, $f'(x)$ γνησίως αύξουσα στο (0,+∞) και $f(0)=0$ .

i. να δείξετε ότι για κάθε $x>0$ υπάρχει $\xi\in(0,x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\frac{f(x)}{x}$ .

ii. αν $g(x)=\frac{f(x)}{x}+e^x\,,x>0$ , να δείξετε ότι η $g$ είναι '1-1'.

iii. αν $g(x)=e^x+x^{2015}\,,x>0$ να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\int_{0}^{e-1}f(x+1)dx$ .

iv. να δείξετε ότι υπάρχει $\eta<2017$ τέτοιο ώστε : $I=e^{\eta}$ .

**14.** Έστω $f,g$ συνεχείς στο $\mathcal{R}$ ,τέτοιες ώστε : $\int_{1}^{x}f(t)dt-2x^2\leq\int_{1}^{x}g(t)dt-2$ $,x\in\mathcal{R}$.

Να δειχτεί ότι η εξίσωση $x^3f(x)=xg(x)+2$ , έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1) .

**15.** Έστω $f,g$ παραγωγίσιμες στο $\mathcal{R}$, με: $e^xf'(x)=g'(x)-g(x),f(0)=g(0)=0$ .

i. να δειχθεί ότι $f(x)=\frac{g(x)}{e^x}$ .

ii. αν η $f$ έχει πλάγια ασύμπτωτη στο +∞ την ευθεία $y=x-2$ , να δειχτεί ότι: $\lim_{x\rightarrow+\infty}\frac{g(x)}{xg(x)-x^2e^x}=-\frac{1}{2}$ .

iii. αν $g'(x)>g(x)$ δείξτε ότι : $\frac{\int_{0}^{1}f(x)dx}{f(e)}>1$ .

**16.** Έστω μιγαδικοί z και w για τους οποίους ισχύουν : $(3-4i)z+(3+4i)\overline{z}=20$ και ο

$\frac{1+w}{1-w}$ είναι φανταστικός. Να βρεθούν: i. οι γεωμετρικοί τόποι των εικόνων των z και w.

ii. ο μιγαδικός z με το μικρότερο μέτρο. iii. να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του $|z-w|$ .

**17.** Έστω $f:[0,+\infty)\to(0,+\infty)$ για την οποία ισχύουν : $f(0)=1$ , $f'(x)=\frac{8}{(2x+1)^2}-1$ .

i. Να βρεθούν ο τύπος της συνάρτησης $f$, οι θέσεις και οι τιμές των τοπικών ακρότατων και οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$ .

ii. Να δειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό ξ τέτοιο ώστε $f(\xi)=-2024$ .

**18.** Δίνεται $f:[0,2]\to[0,2]$ , συνεχής και γνησίως μονότονη και τέτοια ώστε :

$f(0)=0$ , $f(f(x))\geq x$ , $x\in[0,2]$ .

i. να δείξετε ότι η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,2]$ .

ii. να δείξετε ότι $f(x)\geq x$ , $x\in[0,2]$ .

iii. να δείξετε ότι : $\int_0^2 f(x)dx\geq 2$ .

**19.** Έστω $f:\mathcal{R}\to\mathcal{R}$ συνεχής με $f^5(x)+2f(x)=x+3$ , $x\in\mathcal{R}$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι '1-1' .

ii. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\int_{-3}^{0} f(x)dx$ .

iii. Να δείξετε ότι f($\mathcal{R}$) = $\mathcal{R}$ και να βρεθεί ο τύπος της $f^{-1}$.

**20.** Αν 0<α<β και f: [α,β]→$\mathcal{R}$ συνεχής με f(α)>α και $\int_\alpha^\beta f(x)dx<\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}$ (1), να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\xi$.