ΘΕΜΑ Α

1. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ; ***(5 μονάδες)***

2. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ΄ ένα διάστημα (α,β) ,με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι: i) αν $f\,'(x)>0$ στο (α, x_0) και $f\,'(x)<0$ στο (x_0,β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f και ii) αν η $f\,'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο (α, x_0)U(x_0,β) , τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β). ***(10 μονάδες)***

3. Είναι σωστοί ή λανθασμένοι οι ισχυρισμοί; ***(10 μονάδες)***

i. Αν το $A(x_o, f(x_o))$ είναι σημείο καμπής της C_f , τότε $f''(x_o) = 0$.

ii. Αν μια συνάρτηση f έχει παράγουσα την F στο Δ, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο Δ.

iii. Για κάθε συνεχή συνάρτηση f στο [α ,β] με $\int_\alpha^\beta f(t)dt > 0$ ισχύει :

$f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

iv. Στα σημεία καμπής η εφαπτομένη της C_f «διαπερνά» την καμπύλη.

v. Για κάθε κυρτή συνάρτηση ισχύει: $f''(x_o) > 0$.

ΘΕΜΑ Β

Έστω $f(z) = \frac{z+2i^{2015}}{z+1}$ με $z \in C$, $z \neq -1$.

1. Να γραφτεί ο μιγαδικός $f(-1+i)$ στη μορφή $\alpha + \beta i$. ***(5 μονάδες)***

2. Αν $|w+2-3i| \leq \sqrt{5}+1$,να βρεθεί η μέγιστη κι η ελάχιστη τιμή της παράστασης $|f(-1+i) - w|$. ***(8 μονάδες)***

3. Αν μύγα κινείται στα ίχνη των εικόνων $M(z)$ για τις οποίες ο $f(z)$ είναι φανταστικός, να βρεθεί η καμπύλη κίνησης της μύγας. ***(6 μονάδες)***

4. Να γραφεί ο μιγαδικός $f(2-i)$ ως άθροισμα των z_1 , z_2 που κινούνται πάνω στις ευθείες $y = x+1$, $y = 2x-2$ αντίστοιχα. ***(6 μονάδες)***

ΘΕΜΑ Γ

Έστω f, g: $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ τέτοιες ώστε : $f(x) = t^x + (1-t)^x - 1, g(x) = f(x) + x - 1,$

$0 < t < 1.$

1. Να δείξετε ότι η C_g είναι κυρτή στο $\mathcal{R}$ και να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ της C_g . ***(6 μονάδες)***
2. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0,1)$,τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0$. ***(6 μονάδες)***
3. Να δειχθεί ότι $f(x) \leq 1 - x \, , x \in [0,1]$. ***(6 μονάδες)***
4. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = \int_0^1 t^x e^t dt$ είναι γνήσια φθίνουσα, όταν $0 < t < 1.$ ***(7 μονάδες)***

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ με $f(x) = x + e^x - 1$.

1. Να αποδείξετε ότι ορίζεται αντίστροφη $f^{-1} : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ και ικανοποιείται η σχέση $e^{f^{-1}(x)} + f^{-1}(x) = x + 1 \, , \; x \in \mathcal{R}.$ ***(6 μονάδες)***
2. Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = x$ και η ανίσωση $g(x) + lng(x) \leq e^{x+2} + x + 2,$ αν $g(x) > 0, \; g(0) = 1$ και ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης ως προς την τετμημένη τυχαίου σημείου (x,y) της C_g είναι ίσος με το διπλάσιο του γινομένου τους xy. ***(7 μονάδες)***
3. Να βρεθεί το *E(Ω)* εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από την $C_{f^{-1}}$, $x = e$ και τον χ΄χ . ***(6 μονάδες)***
4. να βρείτε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^e x f^{-1}(x) \, dx$. ***(6 μονάδες)***