ΑΠΑΝΤΉΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΘΕΤΙΚΗΣ-ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 02-06-2014

ΘΕΜΑ Α

1. Θεώρημα σελίδας 251

2. Ορισμός σελίδας 273

3. Ορισμός σελίδας 150

4. ***α. Λ, β. Σ, γ. Σ, δ. Σ, ε. Λ***

ΘΕΜΑ Β

1. $2|z|^2 + (z+\bar{z})i - 4 - 2i = 0 \Rightarrow$ (με z = x + yi , x,y ∈ $\mathcal{R}$)

$$2(x^2+y^2) + 2\mathrm{x}\mathrm{i} - 4 - 2\mathrm{i} = 0 \Rightarrow x^2+y^2+(\mathrm{x}-1)\mathrm{i} - 2 = 0$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2=1 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\pm 1 \\ x=1 \end{cases}$$

Άρα: $z_1 = 1+i$, $z_2 = 1-i$.

2. Από το Β1 έχουμε:

- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i$.
- $w = 3\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{39} = 3i^{39} = 3i^{4\cdot 9+3} = 3i^3 = -3i$

3. $|u+w| = |4z_1 - z_2 - i| \Rightarrow |u-3i| = |4+4i-1+i-i| \Rightarrow$

$$|u-3i| = |3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5 .$$

Άρα: ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με κέντρο Κ(0,3) και ακτίνα ρ=5.

ΘΕΜΑ Γ

1. Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathcal{R}$ κι έχουμε :

- $h'(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{1}{e^x+1} > 0$ (η h είναι γνησίως αύξουσα ως συνεχής στο $\mathcal{R}$)
- $h''(x) = -\frac{1}{(e^x+1)^2}(e^x+1)' = -\frac{e^x}{(e^x+1)^2} < 0.$

Άρα: η h είναι κοίλη στο $\mathcal{R}$ ως συνεχής για κάθε $x \in \mathcal{R}$.

2. Έχουμε: $e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1} \Rightarrow h\left(2h'(x)\right) < ln\frac{e}{e+1} \Rightarrow$

$h\left(2h'(x)\right) < h(1) \Rightarrow$(η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathcal{R}$)

$2h'(x) < 1 \Rightarrow h'(x) < \frac{1}{2} \Rightarrow h'(x) < h'(0) \Rightarrow x > 0$ (αφού η h είναι κοίλη στο $\mathcal{R}$, η h' είναι γνησίως φθίνουσα)

3. Για τις ασύμπτωτες της C_h θα βρούμε τα όρια:

- $lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} [x - ln\,(e^x+1)] = \lim_{x\to+\infty} ln\frac{e^x}{e^x+1} = ln\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}\right) = ln1 = 0.$ (αφού: $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1} = (\frac{0}{0})$ κι εφαρμόζοντας l'Hospital $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x} = 1$)
- <u>Άρα: η ευθεία y=0 (ο άξονας χ΄χ) είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_h στο $+\infty$.</u>
- $lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}[1 - \frac{ln\,(e^x+1)}{x}] = 1 - \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\lim_{x\to-\infty}(e^x+1) = 1 - 0 = 1 = \lambda$
- $lim_{x\to-\infty}[h(x) - \lambda x] = \lim_{x\to-\infty}[x - ln(e^x+1) - x] = \lim_{x\to-\infty}[-ln(e^x+1)] = -ln1 = 0 = \beta.$

  Οπότε, αφού η ευθεία $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ δίνει την ζητούμενη ασύμπτωτη,
- <u>η $y = x$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της C_h στο $-\infty$.</u>

4. Έχουμε: $\varphi(x) = e^x(x + ln\frac{2}{e^x+1})$,με φ(0)=0 και αν $\varphi(x) \geq 0 \Rightarrow -ln\frac{e^x+1}{2} \geq -x$

$\Rightarrow e^x \geq \frac{e^x+1}{2} \Rightarrow e^x \geq 1 \Rightarrow x \geq 0.$ Η $\varphi(x)$ είναι συνεχής και $\varphi(x) \geq 0, x \geq 0.$

<u>Άρα:</u>

$E(\Omega) = \int_0^1 |\varphi(x)|\,dx = \int_0^1 (e^x)'\,ln\frac{2e^x}{e^x+1}dx =$

$\left[e^x ln\frac{2e^x}{e^x+1}\right]_0^1 - \int_0^1 e^x \frac{e^x+1}{2e^x}\frac{2e^x(e^x+1)-2e^xe^x}{(e^x+1)^2}dx = eln\frac{2e}{e+1} - \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx = eln\frac{2e}{e+1} -$

$[\ln\,(e^x+1)]_0^1 = eln\frac{2e}{e+1} - \ln(e+1) + ln2 = eln\frac{2}{e+1} + elne + ln\frac{2}{e+1} =$

$(e+1)ln\frac{2}{e+1} + e\ \tau.\mu.$

ΘΕΜΑ Δ

1. Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to 0}e^x=1=f(0)$, (αφού είναι $\left(\frac{0}{0}\right)$, εφαρμόζοντας l'Hospital)

Άρα: η συνάρτηση είναι συνεχής στο $x_0=0$, όπως και σ'όλο το $\mathcal{R}$.

- $f'(x)=\left(\frac{e^x-1}{x}\right)'=\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}$, $x\neq 0$.
- Έστω συνάρτηση $u(x)=xe^x-e^x+1,\ x\in\mathcal{R}$.

$$u'(x)=xe^x-e^x+e^x=xe^x.$$

Για $x\geq 0$, $u'(x)\geq 0$, η u είναι αύξουσα, άρα $u(x)\geq u(0)\Rightarrow u(x)\geq 0$.

Για $x<0$, $u'(x)<0$, η u είναι γνησίως φθίνουσα, άρα $u(x)>u(0)\Rightarrow u(x)>0$.

Επομένως $u(x)\geq 0$, $x\in\mathcal{R}$, οπότε $f'(x)>0$ και η f είναι γν. αύξουσα $x\neq 0$ και η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathcal{R}$.

2. α) Η f είναι θετική και συνεχής στο $\mathcal{R}$ (με $x>0$ είναι $\frac{e^x-1}{x}>0$, με $x<0$ είναι $\frac{e^x-1}{x}>0$ και $f(0)=1$), οπότε αν $\alpha<\beta$ έχουμε $I=\int_\alpha^\beta f(u)du>0$ (αφού «η f είναι συνεχής και δεν είναι παντού μηδέν»).

Άρα: $I(x)=\int_1^{2f'(x)}f(u)du>0$, όταν $1<2f'(x)$ και $I(x)<0$, αν $1>2f'(x)$. Η μόνη περίπτωση να μηδενίζεται το **I(x),** είναι τα άκρα ολοκλήρωσης να είναι ίσα, δηλαδή $2f'(x)=1$.

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^x-1-x)'}{(x^2)'}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\frac{1}{2}=f'(0)$.

- Η εξίσωση $f'(x)=\frac{1}{2}$ έχει λύση την $x=0$, που είναι και μοναδική μια και η f είναι κυρτή, δηλαδή η f'είναι γνησίως αύξουσα.

β) $x'(t)=2y'(t) \Rightarrow$ (αφού $x'(t)>0$)$\Rightarrow \frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\left(f\left(x(t)\right)\right)'}{x'(t)}=f'(0) \Rightarrow$ $\frac{f'(x(t))x'(t)}{x'(t)}=f'(0) \Rightarrow f'\left(x(t)\right)=f'(0) \Rightarrow x(t)=0$. (αφού f'είναι γνησίως αύξουσα και f' «1-1»). Άρα το σημείο $\mathrm{M}\left(x(t),y(t)\right)=\left(0,f(0)\right)=(0,1)$.

3. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathcal{R}$ κι έχουμε :

- $g(x)=[(xf(x)+1-e)(x-2)]^2=[\left(x\frac{e^x-1}{x}+1-e\right)(x-2)]^2=$ $[(e^x-e)(x-2)]^2$. $(x\neq 0)$
- $g'(x)=2(e^x-e)(x-2)[e^x(x-2)+e^x-e]=2(e^x-e)(x-2)(xe^x-e^x-e)$. $(x\neq 0)$.Έχουμε ρίζες της g' τα 1,2 κι αναζητούμε άλλη μία.
- Θεωρούμε την $h(x)=xe^x-e^x-e$ στο $(0,+\infty)$, με $h'(x)=xe^x>0$, άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ ως συνεχής.
- Εξετάζουμε αν υπάρχει ρίζα δεξιά του 2, βρίσκοντας την εικόνα $h((2,+\infty))=$ $\left[h(2),\lim_{x\to+\infty}h(x)\right]=\left[e^2-e,\lim_{x\to+\infty}\left((x-1)e^x-e\right)\right]=[e^2-e,+\infty)$. , όπου $e^2-e>O$ και το 0 δεν ανήκει στο $[e^2-e,+\infty)$.

Άρα ίσως να υπάρχει ρίζα αριστερά του 2. Έχουμε $h(1)=-e<0$, $h(2)>0$ και h συνεχής στο $(0,+\infty)$, άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει αριθμός η ∈ (1,2) τέτοιος ώστε $h(\eta)=0$, που είναι και μοναδικός, εφ' όσον η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα. Το πρόσημο της $g'(x)$ και τα τοπικά ελάχιστα και μέγιστα της $g(x)$ φαίνονται στον πίνακα:

x	0		1		η		2	+∞
e^x-e	−	0	+		+		+	
$x-2$	−		−		−	0	+	
$(x-1)e^x-e$	−		−	0	+		+	
$g'(x)$	−	0	+	0	−	0	+	
$g(x)$	↘	Τ	Ε ↗	Τ	Μ ↘	Τ	Ε ↗	