ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ	
ΟΝΟΜΑ ΜΑΘΗΤΗ	**..**
ΤΑΞΗ	**Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΜΑΘΗΜΑ	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**
ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ	**Επαναληπτικό Διαγώνισμα**

ΘΕΜΑ Α

1. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα Δ. Τι ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ; ***(4 μονάδες)***

2. Τι είναι συζυγής ενός μιγαδικού αριθμού και ποια η γεωμετρική του παράσταση; ***(4 μονάδες)***

3. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα Δ. Αν F μια παράγουσά της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι : i) όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathcal{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ, ii) κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathcal{R}$. ***(7 μονάδες)***

4. Είναι σωστοί ή λανθασμένοι οι ισχυρισμοί; ***(10 μονάδες)***

i. $\int_\alpha^\beta [\lambda f(x) + \mu g(x)]dx = \lambda \int_\alpha^\beta f(x)dx + \mu \int_\alpha^\beta g(x)dx$

ii. $\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$

iii. Για κάθε συνεχή συνάρτηση f στο [α ,β] με $\int_\alpha^\beta f(t)dt > 0$ ισχύει :

$f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

iv. Η συνάρτηση $\int_\alpha^x f(t)dt$ είναι παράγουσα της f σε διάστημα Δ, όπου f συνεχής στο Δ και α∈Δ.

v. Για κάθε α>0 ισχύει: $\int_{-\alpha}^{\alpha} (x^4 + 1)dx \geq \int_{-\alpha}^{\alpha} (x^4 + x^2 + 1)dx$.

ΘΕΜΑ Β

Έστω $\mathbf{z} \in \boldsymbol{C}$ για τους οποίους $|\boldsymbol{z} - \mathbf{1}| = \mathbf{1} + \boldsymbol{Re}(\boldsymbol{z})$ **.**

1. Να βρεθεί η καμπύλη πάνω στην οποία κινούνται οι εικόνες των $M(z)$. ***(6 μονάδες)***

2. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο [0,1], με $f(0) \neq f(1) \neq 1$ και σύνολο τιμών [0,2]. Δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $x_o \in (0,1)$ τέτοιο ώστε: $f(x_o) = 1$. ***(6 μονάδες)***

3. Αν η f προκύπτει από το ερώτημα $B1$, όταν $y \geq 0$ και το σημείο x_o από από το ερώτημα $B2$, να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο αυτό. ***(6 μονάδες)***

4. Να υπολογιστεί το $E(\Omega)$ για το χωρίο που περικλείεται μεταξύ των C_f , της εφαπτομένης *(ε)* και του άξονα xx' . ***(7 μονάδες)***

ΘΕΜΑ Γ

Έστω συνάρτηση $f: [0, +\infty) \to \mathcal{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 e}\int_0^x g(t)dt\,,\ x > 0 \\ 0,\ x = 0 \end{cases}$,

όπου $g(t)$ τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ και $g(0)=0$, $g'(0)=0$.

1. Να μελετηθεί η f ως προς τη συνέχεια. ***(5 μονάδες)***

2. Αν ισχύει $\left(\int_0^1 g(t)dt\right)^2 < -\int_0^1 g(t)dt \cdot \int_1^2 g(t)dt$, να αποδειχτεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε: $\boldsymbol{f(\xi) = 0}$. ***(6 μονάδες)***

3. Να δειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0. ***(6 μονάδες)***

4. Να δειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $\eta \in (0, +\infty)$, τέτοιο ώστε να ισχύει: $\boldsymbol{f'(\eta) = 0}$. ***(4 μονάδες)***

5. Αν η g είναι επίσης γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, να δειχθεί ότι:

$\int_0^x xg(t)dt \geq \int_0^x tg(t)dt\,, x \geq 0$. ***(4 μονάδες)***

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

$f(x+y) = f(x) + f(y) + e^y - 2\,, x, y \in \mathcal{R}$, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x} = 1$ και

$g(z) = |z-3| + |z+3|$, $\mathbf{z} \in \boldsymbol{C}$ με $g(z)(f(x)-1) \leq \eta\mu 10x$, $x \in \mathcal{R}$.

1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των $g(z)$ και αν z_1, z_2 δύο από αυτούς, να δείξετε ότι : $8 \leq |z_1 - z_2| \leq 10$. ***(5 μονάδες)***

2. Να δειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathcal{R}$ και $f(x) = 2x + 1, x \in \mathcal{R}$. ***(5 μονάδες)***

3. Να βρεθεί η συνάρτηση $F(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{e^t}dt$, $x \in \mathcal{R}$ και τα όρια :

$A = \lim_{x\to -\infty} F(x)\,,\ B = \lim_{x\to +\infty} F(x)$. ***(5 μονάδες)***

4. Να δειχθεί ότι $F(x) \geq 3 - 2\sqrt{e}$ και ότι η $F(x)$ έχει δύο ακριβώς ρίζες κ και λ, *με* $\kappa < \lambda$, για τις οποίες $lim_{\lambda\to 0}\left[(-\kappa)^\lambda + \lambda^\lambda\right] = 2$. ***(5 μονάδες)***

5. Να δειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $\xi \in (\alpha, 2\alpha)$ τέτοιος ώστε: $\alpha(2\xi + 1) = e^\xi \int_{\alpha - x}^{2\alpha - x} \frac{f(t+x)}{e^{t+x}}dt$, για κάθε $\alpha \neq 0$. ***(5 μονάδες)***