ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Α ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ ΣΤΗ ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΣΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

Θέμα Α

Στις ερωτήσεις Α1-Α4 να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της ερώτησης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση, η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση.

Α1. Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο Τ. Το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών μεγιστοποιήσεων της δυναμικής ενέργειας είναι :

α. Τ/2.

β. Τ/4.

γ. Τ.

δ. 4Τ.

Μονάδες 5

Α2. Σε μια απλή αρμονική ταλάντωση ενός σώματος η εξίσωση της ταχύτητας είναι $υ=υ_{max}ημωt$. Η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι :

α. x = Aημωt.

β. x = Aσυνωt.

γ. x = −Aημωt.

δ. x = −Aσυνωt.

Μονάδες 5

Α3.Ένα σύστημα με ιδιοσυχνότητα 60Hz εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση με συχνότητα 50Hz. Αν αυξήσουμε την περίοδο του διεγέρτη, τότε το πλάτος της ταλάντωσης θα :

α. παραμείνει σταθερό.

β. αυξηθεί.

γ. ελαττωθεί.

δ. αρχικά θα αυξηθεί και στη συνέχεια θα ελαττωθεί.

Μονάδες 5

Α4. Ένα σώμα εκτελεί ταλάντωση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων που γίνονται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας, στην ίδια διεύθυνση, με το ίδιο πλάτος Α και συχνότητες που διαφέρουν λίγο ($f_1 < f_2$), ώστε να δημιουργείται διακρότημα. :

α. Το πλάτος της ταλάντωσης παραμένει σταθερό.

β. Η κίνηση που εκτελεί το σώμα είναι απλή αρμονική ταλάντωση.

γ. Ισχύει η αρχή της επαλληλίας των κινήσεων.

δ. Το μέγιστο πλάτος της ταλάντωσης είναι Α.

Μονάδες 5

Α5. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Η ιδιοσυχνότητα ενός συστήματος, που αποτελείται από ένα σώμα μάζας m δεμένο σε κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς k και εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση, θα διπλασιαστεί αν διπλασιάσουμε τη συχνότητα του διεγέρτη.
β. Η σχέση που συνδέει την επιτάχυνση ενός σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με την απομάκρυνσή του είναι $α=ω^2 \cdot x$.
γ. Σε κάθε απλή αρμονική ταλάντωση τα μεγέθη πλάτος, μέγιστη επιτάχυνση και κινητική ενέργεια παίρνουν μόνο θετικές τιμές.
δ. Σε ένα ιδανικό κύκλωμα ηλεκτρικών ταλαντώσεων ο υποτετραπλασιασμός του συντελεστή αυτεπαγωγής του πηνίου προκαλεί διπλασιασμό της συχνότητας της ταλάντωσης.
ε. Σε ένα ιδανικό κύκλωμα ηλεκτρικών ταλαντώσεων, αν τη χρονική στιγμή t=0 το φορτίο του πυκνωτή είναι Q, τότε η εξίσωση που περιγράφει την ηλεκτρική ταλάντωση είναι $q=Q \cdot ημωt$.

Μονάδες 5

Θέμα Β

Β$_1$. Σε μια φθίνουσα ταλάντωση ενός σώματος και στη θέση που η συνισταμένη δύναμη είναι 0, ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της δύναμης αντίστασης F' είναι :

α) 0 β)≠0

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση **Μονάδες 2**

Δικαιολογήστε την επιλογή σας **Μονάδες 6**

Β$_2$. Ένα σώμα αναγκάζεται να κάνει ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις του ίδιου πλάτους Α και της ίδιας διεύθυνσης με μηδενική αρχική φάση και γύρω από την ίδια Θ.Ι. Οι συχνότητες των δύο ταλαντώσεων διαφέρουν λίγο μεταξύ τους. Αν η περίοδος των διακροτημάτων $T_δ$ που προκύπτουν είναι 100 φορές μεγαλύτερη από την περίοδο της σύνθετης ταλάντωσης του σώματος τότε η απομάκρυνση της σύνθετης ταλάντωσης σε σχέση με το χρόνο θα δίνεται από τη σχέση:
α) $x = 2A.συν\frac{π.t}{T_δ}.ημ\frac{200.π.t}{T_δ}$ β) $x = 2A.συν\frac{t}{T_δ}.ημ\frac{200.t}{T_δ}$ γ) $x = 2A.ημ\frac{π.t}{T_δ}.συν\frac{200.π.t}{T_δ}$

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση **Μονάδες 2**

Δικαιολογήστε την επιλογή σας **Μονάδες 6**

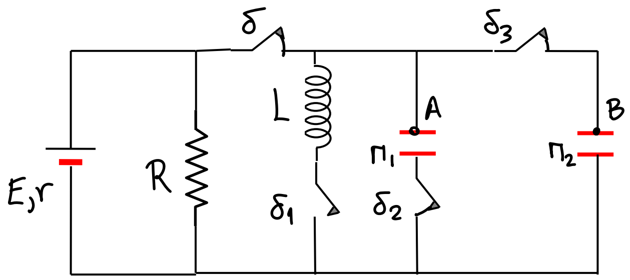
Β$_3$. . Ένα σώμα κάνει ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις της ίδιας συχνότητας, της ίδιας διεύθυνσης και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας. Κάποια χρονική στιγμή που το σώμα διέρχεται από την ακραία θέση, η απομάκρυνση από τη Θ.Ι λόγω της 1ης ταλάντωσης με πλάτος A_1=10m είναι x_1=5m και η ταχύτητα λόγω της δεύτερης ταλάντωσης είναι $υ_2=20\sqrt{3}$ m/s. Επομένως η γωνιακή συχνότητα ω της ταλάντωσης του σώματος θα είναι:

α) ω=4 r/s β) ω=5 r/s γ) ω=10 r/s δ) Τίποτα από τα προηγούμενα.

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση **Μονάδες 2**

Δικαιολογήστε την επιλογή σας **Μονάδες 7**

Θέμα Γ



Στο διπλανό σχήμα οι διακόπτες δ, $δ_2$ και $δ_3$ είναι κλειστοί ενώ ο διακόπτης $δ_1$ είναι ανοιχτός για μεγάλο χρονικό διάστημα. Οι πυκνωτές $Π_1$ και $Π_2$ έχουν την ίδια χωρητικότητα C=1μF, το ιδανικό πηνίο έχει συντελεστή αυτεπαγωγής L=10mH, η πηγή έχει ΗΕΔ E=5V και εσωτερική αντίσταση r=1Ω ενώ ο αντιστάτης έχει ωμική αντίσταση R=4Ω και οι αγωγοί αμελητέα ωμική αντίσταση. Κάποια χρονική στιγμή που τη θεωρούμε t=0 ανοίγουμε το διακόπτη $δ_3$ και το διακόπτη δ και κλείνουμε το διακόπτη $δ_1$. Τη χρονική στιγμή t=3T/4 (όπου T η περίοδος ταλάντωσης του κυκλώματος LC) , ανοίγουμε το διακόπτη $δ_2$ και κλείνουμε το διακόπτη $δ_3$.

Γ1) Να υπολογίσετε το μέγιστο φορτίο που αποκτά ο πυκνωτής $Π_2$ κατά τη διάρκεια ταλάντωσης του κυκλώματος $LΠ_2$.

Μονάδες 8

Γ2)Αν t'=t-3T/4 , να εκφράσετε την μεταβολή του φορτίου q_B σαν συνάρτηση του χρόνου t' και τη μεταβολή του ρεύματος i_L σαν συνάρτηση του χρόνου t για t≥0.

Μονάδες 8

Τη χρονική στιγμή t=T (όπου T η περίοδος ταλάντωσης του κυκλώματος LC) ανοίγουμε το διακόπτη $δ_3$ και κλείνουμε το διακόπτη $δ_2$.

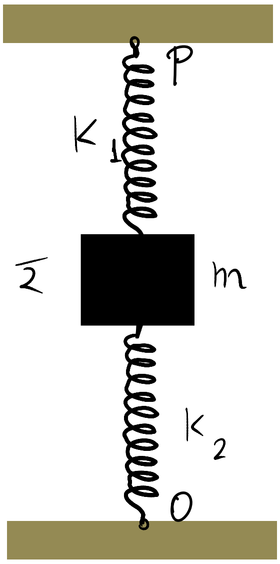
Γ3) Να σχεδιάστε τη φορά του ρεύματος τη χρονική στιγμή (t=T) στο κύκλωμα $LΠ_1$ κάνοντας ένα νέο σχήμα και υπολογίσετε το μέγιστο κατά απόλυτη τιμή ρυθμό μεταβολής του ρεύματος στο πηνίο $Π_1$.

Μονάδες 9

Δίνεται ότι κατά το άνοιγμα και κλείσιμο των διακοπτών δεν ξεσπά σπινθήρας.

Θέμα Δ

Σώμα Σ μάζας m=4Kg ισορροπεί στηριζόμενο με τη βοήθεια 2 κατακόρυφων



ελατηρίων με σταθερές K_1, K_2 όπως δείχνεται στο σχήμα. Κατά την ταλάντωση του σώματος, οι άξονες των ελατηρίων βρίσκονται πάνω στην ίδια κατακόρυφο που διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος ενώ είναι συνδεδεμένα κατά το ένα άκρο τους με το σώμα και κατά το άλλο το μεν K_1 με την οροφή στο P το δε K_2 με το δάπεδο στο O. Απομονώνοντας ένα ελατήριο κάθε φορά συνδεμένο με το σώμα μετρούμε γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης για το (m,K_1), $\omega_1=10\sqrt{3}$ r/s, και για το (m,K_2), $\omega_2=10$ r/s.

Απομακρύνουμε το σώμα Σ λίγο προς τα πάνω και μετά το αφήνουμε ελεύθερο να ταλαντωθεί. Αν γνωρίζουμε ότι κατά την ισορροπία του σώματος τα ελατήρια K_1 και K_2 έχουν την ίδια επιμήκυνση σε σχέση με το φυσικό τους μήκος, τότε:

Δ$_1$) Να αποδείξτε ότι το σύστημα θα εκτελέσει Α.Α.Τ και να υπολογίσετε συχνότητα της ταλάντωσης του.

Μονάδες 6

Αφού επαναφέρουμε το σύστημα στη κατάσταση ισορροπίας του και ενώ το σώμα ισορροπεί, ξαφνικά κάποια χρονική στιγμή που τη θεωρούμε t=0, ένας εκρηκτικός μηχανισμός χωρίζει το σώμα σε 2 κομμάτια με μάζες m_1 και m_2 με $m_1/m_2=3/1$ τα οποία κινούνται κατακόρυφα το μεν κομμάτι μάζας m_1 συνδεμένο με το ελατήριο σταθεράς K_1 το δε κομμάτι μάζας m_2 συνδεδεμένο με το ελατήριο σταθεράς K_2. Αν γνωρίζουμε ότι κατά την έκρηξη εκλύεται ενέργεια 4,5 J που γίνεται εξ ολοκλήρου κινητική ενέργεια των κομματιών

Δ$_2$) Να υπολογίσετε τα πλάτη των ταλαντώσεων των μαζών m_1 και m_2 αντίστοιχα.

Μονάδες 7

Δ$_3$) Να βρείτε τη χρονική στιγμή που θα ξανά συναντηθούν τα 2 κομμάτια.

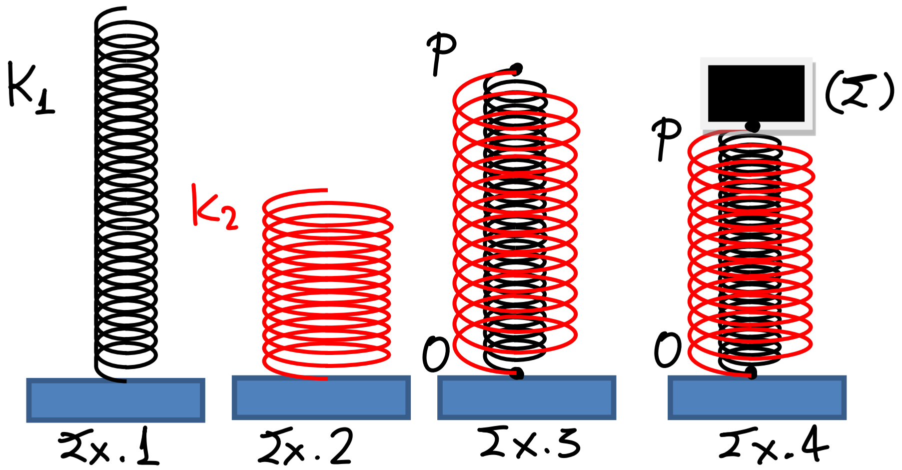
Μονάδες 6

Δ$_4$) Να γράψετε τις χρονικές εξισώσεις των απομακρύνσεων των 2 κομματιών από τις θέσεις ισορροπίας τους αν θεωρήσετε ότι η θετική φορά είναι προς τα πάνω.

Μονάδες 6

Δίνεται ότι όλες οι ταλαντώσεις εκτελούνται στον ίδιο άξονα y, ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g=10m/s^2$.

Θέμα Δ (Εναλλακτικό)



Στα σχήματα Σχ.1 και Σχ.2 δείχνονται 2 ελατήρια τα οποία έχουν σταθερές K_1=300N/m και K_2=100N/m . Το μήκος του ελατηρίου με σταθερά K_1 είναι μεγαλύτερο από το μήκος του ελατηρίου με σταθερά K_2. Τα ελατήρια συγκολλούνται στις άκρες τους ώστε αυτές να αποτελούν τα μοναδικά σημεία επαφής μεταξύ τους και σχηματίζουν ένα «διπλό» ελατήριο το οποίο στερεώνεται στο έδαφος στο Ο (βλ. Σχ.3). Στο πάνω άκρο P στερεώνεται σώμα μάζας m=1Kg το οποίο αφήνεται να ισορροπήσει (βλ. Σχ.4). Στην κατάσταση ισορροπίας του σώματος παρατηρούμε ότι η επιμήκυνση του ελατηρίου με σταθερά K_2 από το φυσικό του μήκος είναι ίση με τη συσπείρωση του ελατηρίου με σταθερά K_1 από το φυσικό του μήκος.
Απομακρύνουμε το σώμα προς τα πάνω μέχρις ότου το ελατήριο με σταθερά K_1 να αποκτήσει το φυσικό του μήκος και στη συνέχεια το αφήνουμε ελεύθερο από την ηρεμία να ταλαντωθεί.
Δ$_1$) Να αποδείξετε ότι το σώμα εκτελεί Α.Α.Τ και να υπολογίσετε τη σταθερά επαναφοράς του συστήματος σώματος-διπλού ελατηρίου.

Μονάδες 6

Δ$_2$) Αν f_1 η συχνότητα ταλάντωσης του συστήματος (m,K_1) και f_2 η συχνότητα ταλάντωσης του συστήματος (m,K_2), να εκφράσετε τη συχνότητα ταλάντωσης f του συστήματος σώματος – διπλού ελατηρίου σε συνάρτηση των f_1 και f_2.

Μονάδες 6

Δ$_3$) Να γράψετε την χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος με αρχική χρονική στιγμή t=0 τη στιγμή που αφέθηκε ελεύθερο να ταλαντωθεί και με θετική φορά προς τα πάνω.

Μονάδες 7

Στη συνέχεια το σύστημα σώματος – διπλού ελατηρίου επαναφέρεται κατά κάποιο τρόπο στη θέση ισορροπίας και ενώ ισορροπεί κάποια χρονική στιγμή που τη θεωρούμε t=0, αποσυνδέεται το ελατήριο σταθεράς K_2 από το πάνω άκρο P.

Δ$_4$) Να υπολογίσετε το νέο πλάτος ταλάντωσης και να γράψετε τη χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος με θετική φορά προς τα πάνω.

Μονάδες 6

Να θεωρήσετε:

1. *Ότι τα ελατήρια παραμένουν κατακόρυφα καθ' όλη τη διάρκεια του φαινομένου.*
2. *Στο «διπλό» ελατήριο οι άξονες των 2 ελατηρίων συμπίπτουν.*
3. *Όλα τα ελατήρια είναι ιδανικά και δεν υπάρχουν απώλειες ενέργειας.*
4. *Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g=10m/s^2$.*

Παρατήρηση: Μπορείτε να επιλέξτε ένα από τα 2 θέματα Δ

Απαντήσεις θεμάτων

Θέμα Α (Απαντήσεις)

Note Title 04/12/2014

A_1 (α)

A_2 (δ)

A_3 (γ)

A_4 (γ)

A_5 (Λ, Λ, Σ, Σ, Λ)

Note Title 04/12/2014

Θέμα Β (Ενδεικτικές απαντήσεις)

Β1. $\Sigma F = 0$ $\quad \dfrac{dF'}{dt}$;

$F' = -b \cdot v$ ή $\dfrac{dF'}{dt} = \dfrac{d}{dt}(-bv)$ ή

$\dfrac{dF'}{dt} = -b\dfrac{dv}{dt}$ ή $\boxed{\dfrac{dF'}{dt} = -b \cdot a \quad (1)}$

όμως επειδή $\Sigma F = m \cdot a$ και $\Sigma F = 0 \Rightarrow a = 0$

και λόγω της $(1) \Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{dF'}{dt} = 0 \quad \text{σωστή (α)}}$

Β2. $T_\delta = 100\, T_T$ ή $\dfrac{1}{T_T} = 100 \cdot \dfrac{1}{T_\delta}$ ή

$f_T = \dfrac{100}{T_\delta}$, $f_T = \dfrac{f_1 + f_2}{2}$ Άρα $\boxed{f_1 + f_2 = \dfrac{200}{T_\delta} \quad (1)}$

επίσης $\boxed{\dfrac{1}{T_\delta} = |f_1 - f_2| \quad (2)}$

Η απομάκρυνση της σύνθετης ταλάντωσης θα είναι

$y = 2A\,\text{συν}\,\dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\;\text{ημ}\,\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}t$ ή

$y = 2A\,\text{συν}\,\pi|f_1 - f_2| \cdot t\;\text{ημ}\,\pi(f_1+f_2) \cdot t$ ή λόγω

(1), (2) $\boxed{y = 2A\,\text{συν}\,\dfrac{\pi t}{T_\delta}\;\text{ημ}\,\dfrac{200\pi t}{T_\delta} \quad \text{σωστή (α)}}$

B_3

τη δεδομένη χρονική στιγμή $v=0$ $x_1=5m$

$A_1=10\,m$, $v_2=20\sqrt{3}\ m/s$

Λόγω της αρχής της επαλληλίας ισχύει:

$$x=x_1+x_2 \quad \text{ή} \quad \frac{dx}{dt}=\frac{dx_1}{dt}+\frac{dx_2}{dt} \quad \text{ή}$$

$v=v_1+v_2$, οπότε τη δεδομένη χρονική στιγμή $0=v_1+v_2$ ή $v_1=-v_2=-20\sqrt{3}\ m/s$

όμως από Α.Δ.Ε.Τ λόγω της 1ης ταλ.

$$\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m}v_1^2+\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m}\omega^2x_1^2=\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m}\omega^2A_1^2$$

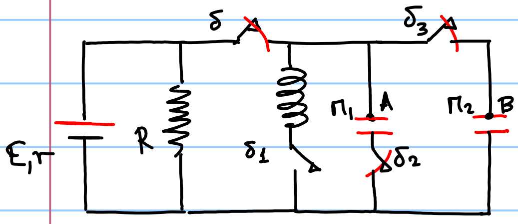
$$v_1^2=\omega^2(A_1^2-x_1^2) \quad \text{ή} \quad \omega^2=\frac{v_1^2}{A_1^2-x_1^2}$$

$$\text{ή} \quad \omega=\frac{|v_1|}{\sqrt{A_1^2-x_1^2}}=\frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{10^2-5^2}}=\frac{20\sqrt{3}}{5\sqrt{3}}=4\ r/s$$

Άρα $\boxed{\omega=4\ r/s \quad \text{δηλ. } (\alpha)}$

Note Title 03/12/2014

Θέμα Γ (Ενδεικτική λύση)



$E = 5V \quad r = 1\Omega \quad R = 4\Omega$

$C = 1\mu F \quad L = 10mH$

1) δ, δ2, δ3 κλειστοί και δ1 ανοιχτός

2) $t=0$: δ3 ανοιχτός δ ανοιχτός δ1 κλειστός κ λόγω

3) (1) δ2 κλειστός

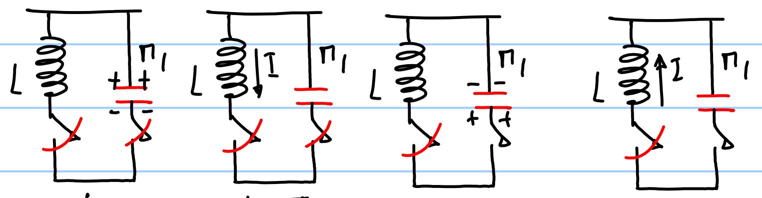
$t = \frac{3T}{4}$: δ2 ανοιχτός κ δ3 κλειστός επίσης λόγω (2)

δ ανοιχτός κ δ1 κλειστός

Γ1) Λόγω (1) $V_{\Pi_1} = V_{\Pi_2} = V_R = \frac{E \cdot R}{R+r} = \frac{5 \cdot 4}{5} = 4V$

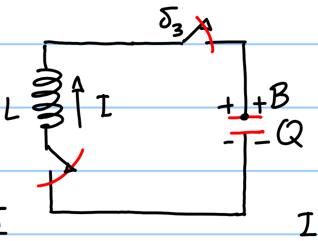
και $q_{\Pi_1} = q_{\Pi_2} = CV_{\Pi_1} = CV_{\Pi_2} = Q = 4 \cdot 10^{-6} C$

(2) $\Longrightarrow$



$t=0 \qquad t = \frac{T}{4} \qquad t = \frac{T}{2} \qquad t = \frac{3T}{4}$

(3) $\Longrightarrow$



Λόγω Α.Δ.Ε

$\cancel{\frac{1}{2}} L I^2 + \cancel{\frac{1}{2}} \frac{Q^2}{C} = \cancel{\frac{1}{2}} \frac{Q^2_{max}}{C}$

$I = \omega Q$ Άρα

$t = \frac{3T}{4}$

$t' = 0$

$L\omega^2 Q^2 + \frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2_{max}}{C}$ ή $Q^2_{max} = 2Q^2$

Άρα $Q_{max} = Q\sqrt{2}$

Δηλ. $\boxed{Q_{max(\Pi_1)} = Q\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \cdot 10^{-6} C \quad (1)}$

Γ2) $t' = t - \frac{3T}{4}$ $\quad q_B = f(t')$ $\quad i_L = f(t)$ $\quad t \geq 0$

$t' \geq 0$ δηλ $t \geq \frac{3T}{4}$. Όταν $t' = 0$ $q_B = Q$ $i > 0$

$q_B = Q_{max} \cdot ημ(ωt' + φ_0)$ ή $q_B = Q\sqrt{2}\,ημ(ωt' + φ_0)$

$i_L = I_{max}\, συν(ωt' + φ_0)$ ή $i_L = ωQ\sqrt{2}\,συν(ωt' + φ_0)$

$t' = 0$ $\quad Q = Q\sqrt{2}\,ημφ_0$ ή $ημφ_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

κ $ωQ = ωQ\sqrt{2}\,συνφ_0$ ή $συνφ_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\Big\} \Rightarrow φ_0 = \frac{π}{4}$

Άρα $q_B = Q\sqrt{2}\,ημ(ωt' + \frac{π}{4})$ με $ω = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^4\, r/s$

Άρα $\boxed{q_B = 4\sqrt{2} \cdot 10^{-6}\, ημ(10^4 t' + \frac{π}{4}) \quad (S.I) \quad (2)}$

Επίσης για $t' \geq 0$ $\quad i_L = ωQ\sqrt{2}\,συν(ωt' + \frac{π}{4})$

ή $i_L = 10^4 \cdot 4 \cdot 10^{-6}\sqrt{2}\,συν(10^4 t' + \frac{π}{4})$

ή $i_L = 4 \cdot \sqrt{2} \cdot 10^{-2}\, συν(10^4 t' + \frac{π}{4})$ $\quad t' \geq 0$ ή $\underline{t \geq \frac{3T}{4}}$

Θέτοντας όπου $t' = t - \frac{3T}{4}$ θα έχω:

$ωt' = ωt - \frac{2π}{\cancel{T}} \cdot \frac{3\cancel{T}}{4}$ ή $ωt' = ωt - \frac{3π}{2}$

ή $10^4 t' = 10^4 t - \frac{3π}{2}$ επομένως

$i_L = 4\sqrt{2} \cdot 10^{-2}\, συν(10^4 t - \frac{3π}{2} + \frac{π}{4})$

ή $i_L = 4\sqrt{2} \cdot 10^{-2}\, συν(10^4 t - \frac{5π}{4})$ $\quad t \geq \frac{3T}{4}$

$T = \frac{2π}{ω} = \frac{2π}{10^4} = 2π \cdot 10^{-4}$ δηλ $t \geq \frac{3π}{2} \cdot 10^{-4}\, s$

δηλ $\boxed{i_L = 4\sqrt{2} \cdot 10^{-2}\, συν(10^4 t - \frac{5π}{4}) \quad (S.I) \qquad t \geq \frac{3π}{2} \cdot 10^{-4}\, s \quad (3)}$

Από $0 \le t \le \frac{3T}{4}$ $\quad i_L = -I\,ημωt$ ή $i_L = -ωQ\,ημωt$

ή $\quad i_L = -4\cdot10^{-2}\,ημ10^{4}t$ $\quad$ δηλ.

$$\boxed{i_L = -4\cdot10^{-2}\,ημ10^{4}t \quad (4) \qquad 0 \le t \le \frac{3π\cdot10^{-4}}{2}\,s \quad (S.I)}$$

Από (3),(4)

$$\boxed{i_L = \begin{cases} -4\cdot10^{-2}\,ημ10^{4}t & 0 \le t \le \frac{3π}{2}\cdot10^{-4}\,s \\ 4\sqrt{2}\cdot10^{-2}\,συν\left(10^{4}t - \frac{5π}{4}\right) & t \ge \frac{3π}{2}\cdot10^{-4}\,s \end{cases} \quad (S.I) \qquad (5)}$$

Παρατήρηση:

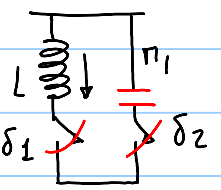
Για $t = \frac{3π}{2}\cdot10^{-4}\,s$

$$i_L\left(\frac{3π}{2}\cdot10^{-4}\right) = \begin{cases} -4\cdot10^{-2}\,ημ\,\cancel{10^{4}}\,\frac{3π}{2}\cdot\cancel{10^{-4}} \\ 4\sqrt{2}\cdot10^{-2}\,συν\underbrace{\left(\frac{3π}{2}-\frac{5π}{4}\right)}_{π/4} \end{cases} = 4\cdot10^{-2}\,A$$

Γ3) (4) $\quad$ δ2 κλειστός κ δ3 ανοιχτός με δ ανοιχτό ως και δ1 κλειστό

Από την (5) $\quad i_L(T) = i_L(2π\cdot10^{-4}) = 4\sqrt{2}\cdot10^{-2}\,συν\left(\cancel{2π}-\frac{5π}{4}\right)$

ή $\quad i_L(T) = -4\cdot10^{-2}\,A$



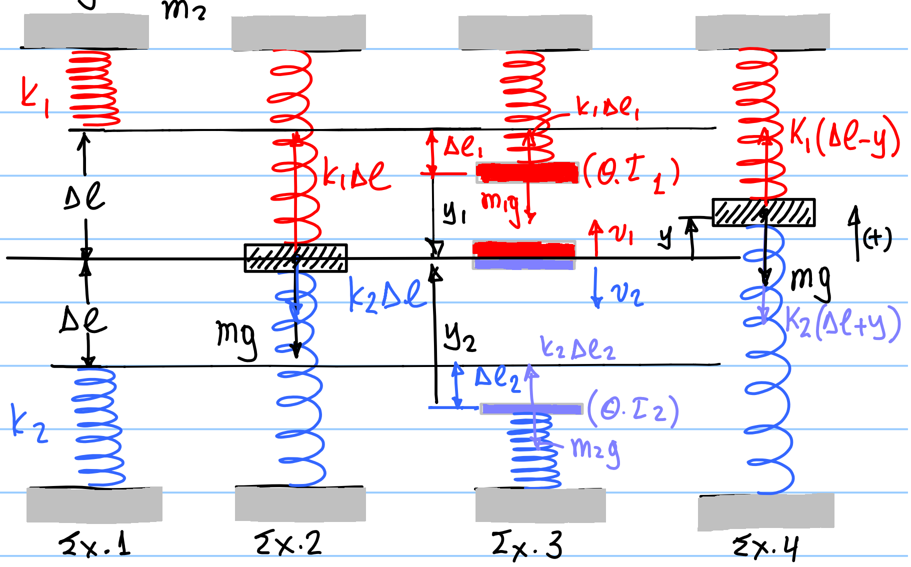
$$\left|\frac{di_L}{dt}\right|_{max} = \frac{|V_{L\,max}|}{L} = \frac{|V_{C\,max}|}{L}$$

$|V_{C\,max}| = \frac{Q}{C}$ Άρα $\left|\frac{di_L}{dt}\right|_{max} = \frac{Q}{LC} = \omega^2 Q = I\omega$

ή $\boxed{\left|\frac{di_L}{dt}\right|_{max} = 4\cdot10^{-2}\cdot10^{4} = 400\ A/s \qquad t \geq 2\pi\cdot10^{-4}\,s}$

Θέμα Δ (Ενδεικτική λύση)

$m = 4\,kg \quad \frac{m_1}{m_2} = 3 \quad \omega_1 = 10\sqrt{3}\ r/s \quad \omega_2 = 10\ r/s$



Δ1) Από Σχ.2 $mg + k_2\Delta\ell = k_1\Delta\ell$

Από Σχ.4 $\Sigma F = k_1(\Delta\ell - y) - mg - k_2(\Delta\ell + y)$

ή $\Sigma F = \cancel{k_1\Delta\ell} - k_1 y - \cancel{mg} - \cancel{k_2\Delta\ell} - k_2 y$

$\Sigma F = -(k_1 + k_2)\cdot y$ ή $\Sigma F = -D\cdot y$

με $D = k_1 + k_2$ Άρα το σώμα εκτελεί ΑΑΤ

και $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$ Άρα $\omega^2 = \frac{k_1+k_2}{m}$

ή $\omega^2 = \frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m}$ όπου $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$

και $\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m}}$ Άρα $\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2$

Άρα $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = \sqrt{400} = 20\, r/s$

επομένως $\boxed{f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{20}{2\pi} = \dfrac{10}{\pi}\ Hz \quad (1)}$

Δ2) $\dfrac{m_1}{m_2} = 3$ $\quad E = 4{,}5\, J \quad A_1;\ A_2;$

$m_1 + m_2 = 4$ Άρα $m_1 = 3\ kg$ κ $m_2 = 1\ kg$

Από σχήμα 3 φαίνεται ότι : $|y_1| = \Delta\ell - \Delta\ell_1, |y_2| = \Delta\ell + \Delta\ell_2$

$(Θ.Ι)_1$ $\ k_1 \Delta\ell_1 = m_1 g$ ή $\Delta\ell_1 = \dfrac{m_1 g}{k_1}$ κ $(Θ.Ι)_2$ $\ k_2 \Delta\ell_2 = m_2 g$

$\Delta\ell_2 = \dfrac{m_2 g}{k_2}$ επίσης από σχ. 2 $\Delta\ell = \dfrac{mg}{k_1 - k_2}$ επίσης

$k_1 = m\omega_1^2$ και $k_2 = m\omega_2^2$ οπότε έχω:

$k_1 = 1200\, N/m$, $k_2 = 400\, N/m$, $\Delta\ell_1 = \dfrac{1}{40} m$, $\Delta\ell_2 = \dfrac{1}{40} m$

$\Delta\ell = \dfrac{1}{20} m$, $|y_1| = \dfrac{1}{40} m$, $|y_2| = \dfrac{3}{40} m$

Α.Δ.Ο $\quad \vec{P}_{ολ}(A) = \vec{P}_{ολ}(T)$ ή $0 = m_1|v_1| - m_2|v_2|$

ή $\boxed{\dfrac{|v_2|}{|v_1|} = 3}$

(Α.Δ.Ε) $\quad E = \dfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \dfrac{1}{2} m_2 v_2^2$

ή $m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = 2E$ ή $3v_1^2 + v_2^2 = 2E$ ή

$3v_1^2 + 9v_1^2 = 9$ ή $12 v_1^2 = 9$ ή $v_1^2 = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$

οπότε $v_2^2 = 9v_1^2 = \dfrac{27}{4}$

Από σχήμα 3 εφαρμόζοντας ΑΔΕΤ για κάθε κομμάτι χωριστά θα έχω:

κομμάτι (m_1) $\quad \cancel{\tfrac{1}{2}} m_1 v_1^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}} k_1 y_1^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}} k_1 A_1^2$

$$A_1 = \sqrt{\frac{m_1}{k_1} v_1^2 + y_1^2} = \sqrt{\frac{3}{1200} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{1600}} = \sqrt{\frac{4}{1600}}$$

ή $A_1 = \dfrac{2}{40} m$ ή $\boxed{A_1 = \dfrac{1}{20} m}$

Ομοίως με παρόμοια διαδικασία

$$A_2 = \sqrt{\frac{m_2}{k_2}\upsilon_2^2 + y_2^2} = \sqrt{\frac{1}{400}\cdot\frac{27}{4} + \frac{9}{1600}} = \sqrt{\frac{27}{1600} + \frac{9}{1600}}$$

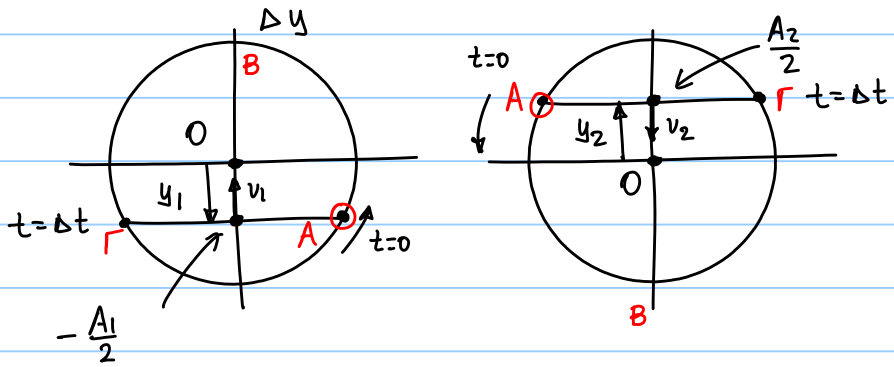
ή $A_2 = \sqrt{\frac{36}{1600}} = \frac{6}{40} = \frac{3}{20}$ ή $\boxed{A_2 = \frac{3}{20}\, m}$

Δ3) Τη χρονική στιγμή $t=0$ έχω:

κομμάτι (m_1) : $y_1 = -\frac{1}{40} m = -\frac{A_1}{2}$ $\quad \upsilon_1 > 0$

κομμάτι (m_2): $y_2 = \frac{3}{40} m = \frac{A_2}{2}$ $\quad \upsilon_2 < 0$

Απο διάγραμμα περιστρεφόμενου διανύσματος θα έχω:



κομμάτι m_1	κομμάτι m_2
$\omega_1' \Delta t = \widehat{AB\Gamma}$	$\omega_2' \Delta t = \widehat{AB\Gamma}$
$\sqrt{\frac{k_1}{m_1}}\Delta t = \widehat{AB\Gamma}$	$\sqrt{\frac{k_2}{m_2}}\Delta t = \widehat{AB\Gamma}$
$20\cdot\Delta t = \frac{4\pi}{3}$	$20\,\Delta t = \frac{4\pi}{3}$
$\Delta t = \frac{\pi}{15} s$	$\Delta t = \frac{\pi}{15} s$

Άρα τα κομμάτια θα ξανασυναντηθούν

τη χρονική στιγμή $\boxed{t = \frac{\pi}{15} s}$

Δ4) $y_1 = A_1 ημ(ω_1' t + φ_{01})$

$y_2 = A_2 ημ(ω_2' t + φ_{02})$

$ω_1' = ω_2' = 20 r/s$ $\quad A_1 = \frac{1}{20} m$ κ $A_2 = \frac{3}{20} m$

$t = 0 \quad y_1 = -\frac{A_1}{2}$ κ $υ_1 > 0$ Άρα

$ημφ_0 = -\frac{1}{2}$ κ $συνφ_0 > 0$ επομένως

$φ_0 = \frac{11π}{6}$ rad

$t = 0 \quad y_2 = \frac{A_2}{2}$ κ $υ_2 < 0$ Άρα

$ημφ_0 = \frac{1}{2}$ κ $συνφ_0 < 0$ επομένως

$φ_0 = \frac{5π}{6}$ rad

Επομένως οι χρονικές εξισώσεις $y_1 = f(t)$, $y_2 = f(t)$ θα είναι:

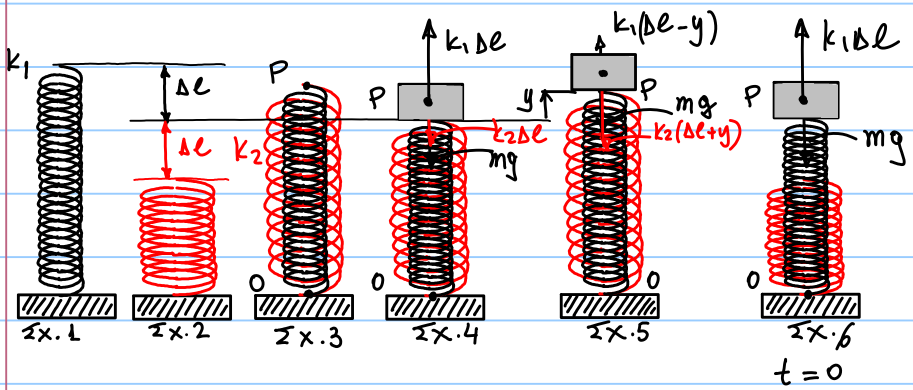
$$y_1 = \frac{1}{20} ημ\left(20t + \frac{11π}{6}\right)$$

(S.I)

$$y_2 = \frac{3}{20} ημ\left(20t + \frac{5π}{6}\right)$$

Θέμα Δ (εναλλακτικό)(Ενδεικτική λύση)

$m = 1\,kg \quad k_1 = 300\,N/m \quad k_2 = 100\,N/m$



Δ1) Από Σχ.4 $\Sigma F = 0$ ή $mg + k_2\Delta\ell = k_1\Delta\ell$

Από Σχ.5 $\Sigma F = k_1(\Delta\ell - y) - k_2(\Delta\ell + y) - mg$

ή $\Sigma F = \cancel{k_1\Delta\ell} - k_1 y - \cancel{k_2\Delta\ell} - k_2 y - \cancel{mg}$

$\Sigma F = -(k_1 + k_2)y$ Άρα $\Sigma F = -D \cdot y$

με $D = k_1 + k_2 =$ σταθ. επομένως το σώμα εκτελεί ΑΑΤ με $\boxed{D = k_1 + k_2 = 400\,N/m \quad (1)}$

Δ2) $f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1}{m}} \qquad f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_2}{m}} \qquad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$

$f_1^2 = \frac{1}{4\pi^2}\frac{k_1}{m} \qquad f_2^2 = \frac{1}{4\pi^2}\frac{k_2}{m} \qquad f^2 = \frac{1}{4\pi^2}\frac{k_1+k_2}{m}$

Άρα $f^2 = \frac{1}{4\pi^2}\frac{k_1}{m} + \frac{1}{4\pi^2}\frac{k_2}{m}$ ή $f^2 = f_1^2 + f_2^2$

δηλ. $\boxed{f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \quad (2)}$

Δ3) $A=\Delta\ell$ τη χρονική στιγμή $t=0$ $\upsilon=0$

και $y=+\Delta\ell$

$$\left.\begin{array}{l} y=\Delta\ell\,\eta\mu(\omega t+\varphi_0) \\ \upsilon=\omega\Delta\ell\,\sigma\upsilon\nu(\omega t+\varphi_0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} t=0 \quad \eta\mu\varphi_0=1 \\ \kappa \quad \sigma\upsilon\nu\varphi_0=0 \end{array} \Big\} \varphi_0=\frac{\pi}{2}$$

Άρα $\upsilon=\omega\Delta\ell\,\sigma\upsilon\nu(\omega t+\frac{\pi}{2})$

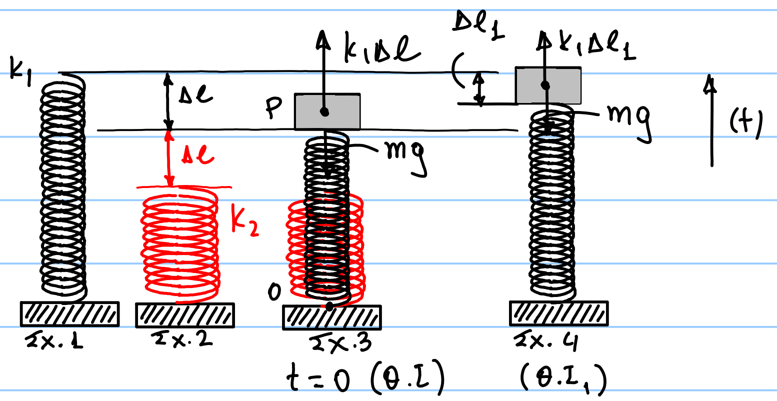
$\omega=\sqrt{\frac{D}{m}}=\sqrt{\frac{400}{1}}=20\,r/s$, $\Delta\ell=\frac{mg}{k_1-k_2}$

ή $\Delta\ell=\frac{10}{200}=\frac{1}{20}\,m$

Άρα $\upsilon=20\cdot\frac{1}{20}\,\sigma\upsilon\nu(20t+\frac{\pi}{2})$

ή $\boxed{\upsilon=-\eta\mu 20t \quad (S.I)}$

Δ4)



Απο (Θ.Ι$_1$) στο σχήμα 4 θα έχω: $k_1\Delta\ell_1=mg$

ή $\Delta\ell_1=\frac{mg}{k_1}=\frac{10}{300}=\frac{1}{30}\,m$

Επομένως το σώμα την $t=0$ βρίσκεται στην κάτω ακραία θέση και το πλάτος της νέας ταλάντωσης θα είναι $A_1 = \Delta\ell - \Delta\ell_1 = \frac{1}{20}m - \frac{1}{30}m = \frac{1}{60}m$

δηλ όταν $t=0$ $y=-A_1$ $\upsilon=0$

$$y = A_1 \eta\mu(\omega_1 t + \varphi_0)$$

με $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}} = \sqrt{\frac{300}{1}} = 10\sqrt{3}\ r/s$

και για $t=0$ $-A_1 = A_1 \eta\mu\varphi_0$

ή $\eta\mu\varphi_0 = -1 = \eta\mu\frac{3\pi}{2}$

Άρα $\varphi_0 = \begin{cases} 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \\ 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$, $0 \le \varphi_0 < 2\pi$

Άρα $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$

δηλ $\boxed{y = \frac{1}{60}\eta\mu\left(10\sqrt{3}t + \frac{3\pi}{2}\right)\ SI}$