

## Θεμα 2

Δίνεται η εξίσωση:  $x^2 - 2(\lambda - 1)x + \lambda + 5 = 0$  (1), με παράμετρο  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι:

$$\Delta = 4\lambda^2 - 12\lambda - 16. \quad (\text{Μονάδες } 7)$$

β) Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 10)

γ) Αν η εξίσωση (1) έχει ρίζες τους αριθμούς  $x_1, x_2$  και  $d(x_1, x_2)$  είναι η απόσταση των

$x_1, x_2$  στον άξονα των πραγματικών αριθμών, να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda$  ισχύει:

$$d(x_1, x_2) = \sqrt{24}. \quad (\text{Μονάδες } 8)$$

## Λύση

α) Το τριώνυμο  $x^2 - 2(\lambda - 1)x + (\lambda + 5)$  έχει  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -2(\lambda - 1)$ ,  $\gamma = \lambda + 5$  και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = [-2(\lambda - 1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda + 5) = 4(\lambda^2 - 2\lambda + 1) - 4\lambda - 20 = 4\lambda^2 - 12\lambda - 16$$

β) Η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow$$

$$4\lambda^2 - 12\lambda - 16 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 > 0 \quad (2)$$

Το τριώνυμο  $\lambda^2 - 3\lambda - 4$  έχει διακρίνουσα:  $\Delta_0 = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25 > 0$  και ρίζες τις:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{3+5}{2} = 4 \\ \frac{3-5}{2} = -1 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

$\lambda$	$-\infty$	$-1$	$4$	$+\infty$	
$\lambda^2 - 3\lambda - 4$	+	○	-	○	+

Επομένως η (2) αληθεύει για:

$$\lambda < -1 \text{ ή } \lambda > 4$$

γ) Από τους τύπους Vieta για το τριώνυμο της εξίσωσης (1) βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-2(\lambda-1)}{1} = 2(\lambda-1) \text{ και}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda+5}{1} = \lambda + 5$$

Τότε, για  $\lambda \in (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$ :

$$d(x_1, x_2) = \sqrt{24} \Leftrightarrow$$

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{24} \Leftrightarrow$$

$$|x_1 - x_2|^2 = \sqrt{24}^2 \Leftrightarrow$$

$$(x_1 - x_2)^2 = 24 \Leftrightarrow$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 24 \Leftrightarrow$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 - 2x_1 \cdot x_2 = 24 \Leftrightarrow$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2 = 24 \Leftrightarrow$$

$$[2(\lambda - 1)]^2 - 4(\lambda + 5) = 24 \Leftrightarrow$$

$$4(\lambda^2 - 2\lambda + 1) - 4\lambda - 20 - 24 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4\lambda^2 - 12\lambda - 40 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 5 \text{ ή } \lambda = -2$$