Θέμα 9

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το πολυώνυμο $4x^2-1$ δίνει πηλίκο $3x-2$ και υπόλοιπο 1.

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=1$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $P(\log 5)\neq 1$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$.

(Μονάδες 5)

Λύση

α) Από την ταυτότητα της διαίρεσης έχουμε $P(x)=(4x^2-1)(3x-2)+1$, οπότε η ζητούμενη εξίσωση γίνεται ισοδύναμα

$$P(x)=1 \Leftrightarrow (4x^2-1)(3x-2)+1=1 \Leftrightarrow (4x^2-1)(3x-2)=0$$

Εύκολα πλέον βρίσκουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί $\pm\frac{1}{2}$ και $\frac{2}{3}$.

β) Δείξαμε στο α) ότι αριθμοί που ικανοποιούν την εξίσωση $P(x)=1$ είναι οι $\pm\frac{1}{2}$ και $\frac{2}{3}$.

Συνεπώς για να ήταν $P(\log 5)=1$, θα έπρεπε $\log 5=\frac{1}{2}$ ή $\log 5=-\frac{1}{2}$ ή $\log 5=\frac{2}{3}$.

Όμως $\log 5\neq -\frac{1}{2}$ αφού $5>1 \Leftrightarrow \log 5>0$.

Επίσης $\log 5=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 5=10^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 5=\sqrt{10}$ το οποίο είναι άτοπο.

Τέλος $\log 5=\frac{2}{3} \Leftrightarrow 5=10^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow 5=\sqrt[3]{10^2}$ το οποίο επίσης είναι άτοπο.

Συνεπώς $P(\log 5)\neq 1$.

γ) Είναι $P(x)=(4x^2-1)(3x-2)+1$, οπότε $P(-1)=(4(-1)^2-1)(3(-1)-2)+1=-14$ και

$P(0)=(-1)(-2)+1=3$.

Αφού οι τιμές $P(-1), P(0)$ είναι ετερόσημες, η εξίσωση $P(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1,0)$.