Θέμα 9

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα *Δ* του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο

έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$. (Μονάδες 8)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S= x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P= x_1 \cdot x_2$ των ριζών. (Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda > 0$ το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

δ) Αν $0 < \lambda \neq 1$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να συγκρίνετε τους αριθμούς $\frac{x_1+x_2}{2}$ και *1*. (Μονάδες 6)

Λύση

α) Το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda$ έχει $\alpha = \lambda$, $\beta = -(\lambda^2+1)$, $\gamma = \lambda$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = [-(\lambda^2+1)]^2 - 4 \cdot \lambda \cdot \lambda =$$
$$= \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 =$$
$$= \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2-1)^2$$

Επειδή για κάθε $\lambda \in R-\{0\}$ ισχύει $\Delta = (\lambda^2-1)^2 \geq 0$ το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες.

β) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-(\lambda^2+1)}{\lambda} = \frac{\lambda^2+1}{\lambda} \text{ και}$$
$$P = x_1x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1$$

γ) Επειδή είναι $S = \frac{\lambda^2+1}{\lambda} > 0$ για $\lambda > 0$ και $P = 1 > 0$ οι ρίζες είναι θετικές.

δ) Είναι:

$$\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{S}{2} = \frac{\frac{\lambda^2+1}{\lambda}}{2} = \frac{\lambda^2+1}{2\lambda}$$

Τότε:

$$\frac{x_1+x_2}{2} - 1 = \frac{\lambda^2+1}{2\lambda} - 1 = \frac{\lambda^2+1-2\lambda}{2\lambda} = \frac{(\lambda-1)^2}{2\lambda} > 0$$

διότι:

$$(\lambda-1)^2 > 0, \text{ για κάθε } \lambda \neq 1 \text{ και } \lambda > 0 \text{ από υπόθεση}$$

Τελικά:

$$\frac{x_1+x_2}{2} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{x_1+x_2}{2} > 1$$