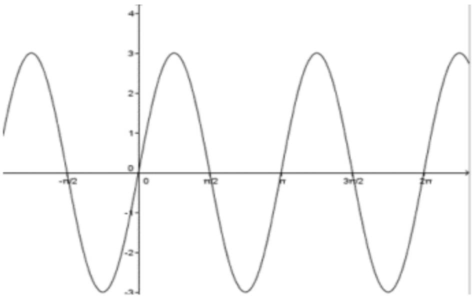
Θέμα 8



Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι της μορφής

$f(x)=\rho\eta\mu(\alpha x),\ x\in\mathbb{R}$ και $\alpha, \rho>0$

α) Να βρείτε, με βάση το σχήμα, την περίοδό της, την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

(Μονάδες 6)

β) Με βάση τις απαντήσεις στο προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε τους αριθμούς α και ρ.

(Μονάδες 6)

Έστω $\rho=3$ και $\alpha=2$. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x)=x^4-2x^2+5,\ x\in\mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με 4.

(Μονάδες 7)

δ) Να αιτιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των f, g δεν έχουν κοινό σημείο.

(Μονάδες 6)

Λύση

α)Από το σχήμα είναι φανερό ότι η γραφική της παράσταση προκύπτει από επανάληψη του τμήματος της που αντιστοιχεί στο διάστημα $[0,\pi]$, οπότε η περίοδος της f είναι $T=\pi$. Επιπλέον οι τεταγμένες των σημείων της γραφικής της παράστασης περιέχονται στο διάστημα $[-3,3]$, οπότε η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με -3 και η μέγιστη είναι ίση με 3.

β) Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x)=\rho\eta\mu(\alpha x)$ με $\alpha,\rho>0$, οπότε έχει περίοδο $T=\dfrac{2\pi}{\alpha}$ ελάχιστη τιμή $-\rho$ και μέγιστη ίση με ρ. Έτσι, έχουμε $\dfrac{2\pi}{\alpha}=\pi$, οπότε $\alpha=2$ και $\rho=3$.

γ) Είναι: $g(x)=x^4-2x^2+5=(x^2-1)^2+4\geq 4$ και η ισότητα $g(x)=4$ ισχύει όταν $x^2=1$ δηλαδή όταν $x=-1$ ή $x=1$. Άρα ο αριθμός 4 είναι η ελάχιστη τιμή της f.

δ) Επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)\leq 3$ και $g(x)\geq 4$, η εξίσωση $f(x)=g(x)$ είναι αδύνατη. Άρα οι γραφικές παραστάσεις των f, g δεν έχουν κοινό σημείο.