Θέμα 8

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $0 < d(x_1, x_2) < 2$. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Το τριώνυμο $x^2 - x + \lambda - \lambda^2$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = \lambda - \lambda^2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - \lambda^2) = 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (1 - 2\lambda)^2$$

Επειδή είναι $\Delta \geq 0$, για κάθε $\lambda \in R$ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

β) Η εξίσωση έχει δύο (πραγματικές) ρίζες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (1 - 2\lambda)^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq \frac{1}{2}$$

Επομένως η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in R - \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

γ) Οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(1-2\lambda)^2}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm (1-2\lambda)}{2} = \begin{cases} \frac{1+1-2\lambda}{2} = 1 - \lambda \\ \frac{1-1+2\lambda}{2} = \lambda \end{cases}$$

Τότε:

$$0 < d(x_1, x_2) < 2 \Leftrightarrow 0 < |x_1 - x_2| < 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < |1 - \lambda - \lambda| < 2 \Leftrightarrow 0 < |1 - 2\lambda| < 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (0 < |1 - 2\lambda| \text{ και } |1 - 2\lambda| < 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 - 2\lambda \neq 0 \text{ και } -2 < 1 - 2\lambda < 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2\lambda \neq 1 \text{ και } -3 < -2\lambda < 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda \neq \frac{1}{2} \text{ και } -\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$