Θέμα 7

Δίνεται η παράσταση $A = \ln\left(\dfrac{e^{2x}-1}{e^{x}-3}\right)$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{\omega^2-1}{\omega-3} > 0$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $A = -\ln 3$.

(Μονάδες 9)

Λύση

α) Η ανίσωση $\dfrac{\omega^2-1}{\omega-3} > 0$ με $\omega \neq 3$ είναι ισοδύναμη με την $(\omega^2-1)(\omega-3) > 0$.

Το πρόσημο του $(\omega^2-1)(\omega-3)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

ω	-∞		-1		1		3		+∞
ω-3		-		-		-	0	+	
ω^2-1		+	0	-	0	+		+	
$(\omega-3)(\omega^2-1)$		-	0	+	0	-	0	+	

Συνεπώς η ανίσωση $\dfrac{\omega^2-1}{\omega-3} > 0$ αληθεύει για κάθε $\omega \in (-1,1) \cup (3,+\infty)$.

β) Η παράσταση A ορίζεται για κάθε πραγματική τιμή του x για την οποία ισχύει $\dfrac{e^{2x}-1}{e^{x}-3} > 0$. Αν θέσουμε $e^x = \omega$ η ανίσωση $\dfrac{e^{2x}-1}{e^{x}-3} > 0$ γίνεται $\dfrac{\omega^2-1}{\omega-3} > 0$ που όπως δείξαμε στο α) αληθεύει για $\omega \in (-1,1) \cup (3,+\infty)$.

Συνεπώς θα πρέπει $-1 < \omega < 1 \Leftrightarrow -1 < e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$ ή $\omega > 3 \Leftrightarrow e^x > 3 \Leftrightarrow x > \ln 3$

Τελικά η παράσταση A ορίζεται για κάθε $x \in (-\infty,0) \cup (\ln 3,+\infty)$.

γ) Η εξίσωση $A = -\ln 3$ ορίζεται για κάθε $x \in (-\infty,0) \cup (\ln 3,+\infty)$ και γίνεται ισοδύναμ

$$
\begin{aligned}
&\ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{x}-3}\right) = \ln 3^{-1} \Leftrightarrow \\
&\frac{e^{2x}-1}{e^{x}-3} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \\
&3e^{2x} - 3 = e^x - 3 \Leftrightarrow \\
&3e^{2x} - e^x = 0 \Leftrightarrow \\
&e^x\left(3e^x - 1\right) = 0 \overset{e^x \neq 0}{\Leftrightarrow} \\
&3e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow \\
&e^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \\
&x = \ln\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

και επειδή $\frac{1}{3} < 1 \Leftrightarrow \ln\frac{1}{3} < 0$ η λύση $x = \ln\frac{1}{3}$ είναι δεκτή.