

Θέμα 7

Μία υπολογιστική μηχανή έχει προγραμματιστεί έτσι ώστε, όταν εισάγεται σε αυτήν ένας πραγματικός αριθμός x , να δίνει ως εξαγόμενο τον αριθμό λ που δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda = (2x+5)^2 - 8x \quad (1)$$

α) Αν ο εισαγόμενος αριθμός είναι το -5 , ποιος είναι ο εξαγόμενος; (Μονάδες 6)

β) Αν ο εξαγόμενος αριθμός είναι το 20 , ποιος μπορεί να είναι ο εισαγόμενος;

(Μονάδες 6)

γ) Να γράψετε τη σχέση (1) στη μορφή $4x^2 + 12x + (25 - \lambda) = 0$ και στη συνέχεια:

i) να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε τιμή και να έχει ο εισαγόμενος αριθμός x , ο εξαγόμενος αριθμός λ δεν μπορεί να είναι ίσος με 5 . (Μονάδες 6)

ii) να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του εξαγόμενου αριθμού λ . (Μονάδες 7)

Λύση

α) Αντικαθιστούμε στην δοθείσα ισότητα $x = -5$ και βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \lambda &= (2(-5) + 5)^2 - 8 \cdot (-5) = \\ &= (-10 + 5)^2 + 40 = (-5)^2 + 40 = \\ &= 25 + 40 = 65 \end{aligned}$$

β) Αντικαθιστούμε στην δοθείσα ισότητα $\lambda = 20$ και βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} 20 &= (2x + 5)^2 - 8x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 20 &= 4x^2 + 20x + 25 - 8x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4x^2 + 12x + 5 &= 0 \end{aligned}$$

Το τριώνυμο $4x^2 + 12x + 5$ έχει $\alpha = 4$, $\beta = 12$, $\gamma = 5$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = 144 - 80 = 64 > 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-12 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 4} = \frac{-12 \pm 8}{8} = \begin{cases} \frac{-12+8}{8} = -\frac{1}{2} \\ \frac{-12-8}{8} = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

γ) Ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \lambda &= (2x + 5)^2 - 8x \Leftrightarrow \lambda = 4x^2 + 20x + 25 - 8x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4x^2 + 12x + (25 - \lambda) &= 0 \quad (2) \end{aligned}$$

i) Έστω ότι ο εξαγόμενος αριθμός μπορεί να γίνει $\lambda = 5$. Αντικαθιστώντας στη σχέση (2) βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 12x + (25 - 5) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4x^2 + 12x + 20 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + 3x + 5 &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$

Η εξίσωση (3) είναι αδύνατη διότι έχει διακρίνουσα $\Delta = -11 < 0$. Αυτό όμως είναι άτοπο.

ii) Το τριώνυμο $4x^2 + 12x + (25 - \lambda)$ έχει $\alpha = 4$, $\beta = 12$, $\gamma = 25 - \lambda$.

Πρέπει η εξίσωση (2) να έχει πραγματικές ρίζες. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned} \Delta_0 \geq 0 &\Leftrightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot (25 - \lambda) &\geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 144 - 400 + 16\lambda &\geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 16\lambda \geq 256 &\Leftrightarrow \lambda \geq 16 \end{aligned}$$