Θέμα 6

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών *α, β* και εμβαδόν *E*, τέτοια ώστε οι αριθμοί *α, E, β*, με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

α) Να αποδείξετε ότι *E=1* (Μονάδες 10)

β) Αν *α + β = 10* τότε:

i) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^ου^ βαθμού με ρίζες τα μήκη *α, β* (Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε τα μήκη *α, β* (Μονάδες 10)

Λύση

α) Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών α και β έχει εμβαδόν $E = \alpha\beta$ (1).

Οι αριθμοί α, Ε, β, με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει:

$$E^2 = \alpha\beta \overset{(1)}{\Leftrightarrow} E^2 = E \overset{E\neq 0}{\Longleftrightarrow} E = 1$$

β) i) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = \alpha + \beta = 10 \quad \text{και}$$

$$P = x_1 x_2 = \alpha\beta = 1$$

Μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με ρίζες τα μήκη α και β είναι η:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 1 = 0 \quad (2)$$

ii) Τα α, β είναι οι λύσεις της εξίσωσης (2). Η εξίσωση (2) έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-10)^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = 96$$

και ρίζες τις

$$x_{1,2} = \frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-10)\pm\sqrt{96}}{2\cdot 1} = \frac{10\pm\sqrt{16\cdot 6}}{2} = \begin{cases} \frac{10+4\sqrt{6}}{2} = 5+2\sqrt{6} \\ \frac{10-4\sqrt{6}}{2} = 5-2\sqrt{6} \end{cases}$$

Άρα τα μήκη είναι $5+2\sqrt{6}$ και $5-2\sqrt{6}$.