Θέμα 5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=1+2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα xx'.

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι $(f(x)-1)^2+(f(1-x)-1)^2=4$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

Λύση

α) Η περίοδος της συνάρτησης f είναι $\mathrm{T}=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$.

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$-1\le\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)\le 1$ οπότε $-2\le 2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)\le 2$ οπότε $-2+1\le 1+2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)\le 2+1$ και τελικά $-1\le f(x)\le 3$.

Επίσης $f(1)=1+2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$ και $f(3)=1+2\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1$.

Συνεπώς η μέγιστη τιμή της f είναι το 3 και η ελάχιστη το -1.

γ) Οι τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα xx' είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$. Είναι

$$f(x)=0\Leftrightarrow 1+2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)=0\Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix}\frac{\pi x}{2}=2\kappa\pi+\left(-\frac{\pi}{6}\right)\\ \acute{\eta}\\ \frac{\pi x}{2}=2\kappa\pi+\pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\frac{\pi x}{2}=2\kappa\pi-\frac{\pi}{6}\\ \acute{\eta}\\ \frac{\pi x}{2}=2\kappa\pi+\frac{7\pi}{6}\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\frac{x}{2}=2\kappa-\frac{1}{6}\\ \acute{\eta}\\ \frac{x}{2}=2\kappa+\frac{7}{6}\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}x=4\kappa-\frac{1}{3}\\ \acute{\eta}\\ x=4\kappa+\frac{7}{3}\end{matrix}\right\},\quad \kappa\in\mathbb{Z}$$

οπότε οι ζητούμενες τετμημένες είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί της μορφής $x=4\kappa-\frac{1}{3}$ ή $x=4\kappa+\frac{7}{3}$, όπου $\kappa\in\mathbb{Z}$.

δ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$f(1-x)=1+2\eta\mu\left(\frac{\pi(1-x)}{2}\right)=1+2\eta\mu\left(\frac{\pi-\pi x}{2}\right)=1+2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}\right)=1+2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, οπότε

$$(f(x)-1)^2+(f(1-x)-1)^2=\left(1+2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)-1\right)^2+\left(1+2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right)-1\right)^2=$$

$$4\eta\mu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)+4\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)=4(\eta\mu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right))=4\cdot 1=4$$

δηλαδή $(f(x)-1)^2+(f(1-x)-1)^2=4$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.