Θέμα 5

Δίνονται οι αριθμοί $2,\ x,\ 8$ με $x > 0$.

α) Να βρείτε την τιμή του x ώστε οι αριθμοί $2, x, 8$, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ποια είναι η διαφορά ω αυτής της προόδου;

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τώρα την τιμή του x ώστε οι αριθμοί $2, x, 8$, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Ποιος είναι ο λόγος λ αυτής της προόδου; (Μονάδες 5)

γ) Αν (α_ν) είναι η αριθμητική πρόοδος 2, 5, 8, 11, ... και (β_ν) είναι η γεωμετρική πρόοδος 2, 4, 8, 16, ... τότε:

i) Να βρείτε το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της (α_ν). (Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε την τιμή του ν ώστε, για το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της (α_ν) να ισχύει: $2(S_\nu + 24) = \beta_7$ (Μονάδες 8)

Λύση

α) Οι αριθμοί 2, x, 8 με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν:

$$x = \frac{2+8}{2} \Leftrightarrow x = \frac{10}{2} \Leftrightarrow x = 5$$

Η διαφορά ω της προόδου είναι:

$$\omega = x - 2 = 5 - 2 = 3$$

β) Οι αριθμοί 2, x, 8 με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν:

$$x^2 = 2 \cdot 8 \Leftrightarrow x^2 = 16 \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} x = 4$$

Ο λόγος λ της προόδου είναι:

$$\lambda = \frac{4}{2} \Leftrightarrow \lambda = 2$$

γ) i) Η αριθμητική πρόοδος (α_ν) έχει $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 3$. Τότε:

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow S_\nu = \frac{\nu}{2}[2 \cdot 2 + (\nu - 1)3] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow S_\nu = \frac{\nu}{2}(4 + 3\nu - 3) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow S_\nu = \frac{\nu}{2}(1 + 3\nu) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow S_\nu = \frac{\nu + 3\nu^2}{2}$$

ii) Η γεωμετρική πρόοδος (β_ν) έχει $\beta_1 = 2$ και $\lambda = 2$. Είναι:

$$\beta_7 = \beta_1\lambda^{7-1} = 2 \cdot 2^6 = 2^7 = 128$$

Τότε:

$$2(S_\nu + 24) = \beta_7 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{\nu + 3\nu^2}{2} + 24\right) = 128 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\nu^2 + \nu + 48 = 128 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\nu^2 + \nu - 80 = 0$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-80) = 1 + 960 = 961 > 0$$

και ρίζες τις

$$\nu_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{961}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm 31}{6} = \begin{cases} \frac{-1+31}{6} = 5 \\ \frac{-1-31}{6} = -\frac{16}{3} \end{cases}$$

Η λύση $\nu = -\frac{16}{3}$ απορρίπτεται διότι δεν είναι φυσικός αριθμός. Τελικά $\nu = 5$.