***Θέμα 4***

Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

- $|1-3\alpha|<2$
- Η απόσταση του αριθμού $\beta$ από τον αριθμό 2 είναι μικρότερη του 1

α) Να αποδειχθεί ότι $-\frac{1}{3}<\alpha<1$ . (Μονάδες 5)

β) Να αποδειχθεί ότι $|\beta-3\alpha-1|<3$. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{4x^2-4(\beta-2)x+\beta^2}$ έχει πεδίο ορισμού όλο το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

(Μονάδες 10)

***Λύση***

**α)** Είναι:

$$|1-3\alpha|<2 \Leftrightarrow -2<1-3\alpha<2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2-1<-1+1-3\alpha<-1+2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -3<-3\alpha<1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{-3}{-3}>\frac{-3\alpha}{-3}>-\frac{1}{3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}<\alpha<1 \quad (1)$$

**β)** Επειδή η απόσταση του αριθμού β από τον αριθμό 2 είναι μικρότερη του 1, ισχύει ότι:

$$d(2,\beta)<1 \Leftrightarrow |\beta-2|<1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -1<\beta-2<1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -1+2<\beta-2+2<1+2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1<\beta<3 \ (2)$$

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της ανίσωσης (1) με $-3$ και βρίσκουμε:

$$-\frac{1}{3}<\alpha<1 \Leftrightarrow 1>-3\alpha>-3 \Leftrightarrow -3<-3\alpha<1 \quad (3)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (2) και (3) και βρίσκουμε:

$$1-3<\beta-3\alpha<3+1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2<\beta-3\alpha<4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2-1<\beta-3\alpha-1<4-1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -3<\beta-3\alpha-1<3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |\beta-3\alpha-1|<3$$

**γ)** Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το R αν και μόνο αν ισχύει:

$$4x^2-4(\beta-2)x+\beta^2\geq 0, \ (4) \ \text{για κάθε } x\in R$$

Το τριώνυμο $4x^2-4(\beta-2)x+\beta^2$ έχει συντελεστή του $x^2$ τον αριθμό $4>0$ και διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=[-4(\beta-2)]^2-4\cdot 4\cdot \beta^2=$$
$$=16(\beta^2-4\beta+4)-16\beta^2=$$
$$=16\beta^2-64\beta+64-16\beta^2=$$
$$=64-64\beta$$

Η ανίσωση (4) ισχύει για κάθε $x\in R$ αν και μόνο αν:

$$\Delta<0 \Leftrightarrow 64-64\beta<0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -64\beta<-64 \Leftrightarrow \beta>1,$$

το οποίο ισχύει λόγω της ανίσωσης (2).