

### Θέμα 3

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \sqrt{x \ln x}$  και  $g(x) = \sqrt{\ln x}$ .

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους.

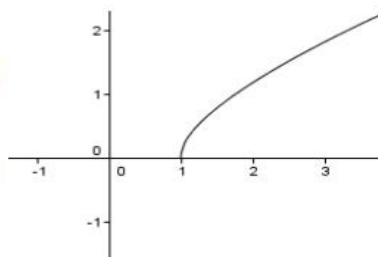
(Μονάδες 4)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της  $f$  είναι από τη γραφική παράσταση της  $g$  και πάνω.

(Μονάδες 5)

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της  $f$ .

γ) i. Να βρείτε τη μονοτονία της.



(Μονάδες 4)

ii. Να συγκρίνετε τους αριθμούς  $f\left(\frac{5}{3}\right)$  και  $f\left(\frac{7}{5}\right)$ .

(Μονάδες 5)

δ) Να σχεδιάσετε την ευθεία  $y = 1 - x$  και να βρείτε γραφικά τη λύση της εξίσωσης  $f(x) = 1 - x$ .

(Μονάδες 7)

### Λύση

α) Η συνάρτηση  $f$  ορίζεται μόνο όταν  $x > 0$  και  $x \ln x \geq 0$ , δηλαδή μόνο όταν  $x \geq 1$ , οπότε  $A_f = [1, +\infty)$ . Ομοίως η  $g$  ορίζεται μόνο όταν  $x > 0$  και  $\ln x \geq 0$ , δηλαδή μόνο όταν  $x \geq 1$ , οπότε  $A_g = [1, +\infty)$ .

β) Με  $x \geq 1$  έχουμε:

$$f(x) - g(x) = \sqrt{x \ln x} - \sqrt{\ln x} = (\sqrt{x} - 1) \sqrt{\ln x} \geq 0$$

αφού καθένας από τους όρους του γινομένου είναι μη αρνητικός. Επομένως, η γραφική παράσταση της  $f$  είναι από τη γραφική παράσταση της  $g$  και πάνω.

γ) i. Από τη γραφική παράσταση της  $f$  προκύπτει ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της  $A_f = [1, +\infty)$ .

ii. Επειδή  $\frac{5}{3} - \frac{7}{5} = \frac{25 - 21}{15} = \frac{4}{15} > 0$ , ισχύει  $\frac{5}{3} > \frac{7}{5}$  και αφού η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα

συμπεραίνουμε ότι  $f\left(\frac{5}{3}\right) > f\left(\frac{7}{5}\right)$ .

δ) Η ευθεία  $\varepsilon: y = 1 - x$  τέμνει τους άξονες  $x'$  και  $y'$  στα σημεία  $(1, 0)$  και  $(0, 1)$  αντίστοιχα όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, απ' όπου προκύπτει ότι το μοναδικό κοινό σημείο της με την  $C_f$  είναι το  $(1, 0)$ . Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση  $f(x) = 1 - x$  έχει μοναδική ρίζα την  $x = 1$ .

