

Θέμα 3

Δίνεται μια αριθμητική πρόοδος (α_n) , όπου $n \in \mathbb{N}^+$.

Αν οι τρεις πρώτοι όροι της προόδου είναι:

$$\alpha_1 = x, \quad \alpha_2 = 2x^2 - 3x - 4, \quad \alpha_3 = x^2 - 2, \quad \text{όπου } x \in \mathbb{Z},$$

τότε,

α) να αποδειχθεί ότι $x = 3$. (Μονάδες 10)

β) να βρεθεί ο n -οστός όρος της προόδου και να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει όρος της προόδου που να ισούται με 2014. (Μονάδες 8)

γ) να υπολογιστεί το άθροισμα $S = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{15}$. (Μονάδες 7)

Λύση

α) Αφού πρόκειται για 3 διαδοχικούς όρους Α.Π. θα ισχύει:

$$2(2x^2 - 3x - 4) = x + x^2 - 2 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ή } x = -2/3$$

Επειδή το $x \in \mathbb{Z}$, δεκτό είναι μόνο το $x = 3$

β) Η αριθμητική πρόοδος έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = 3$ και διαφορά $\omega = 2$. Άρα ο n -οστός όρος της προόδου είναι:

$$\alpha_n = 3 + (n-1) \cdot 2 = 2n + 1$$

Αν υπάρχει όρος της προόδου ίσος με 2014 θα πρέπει η εξίσωση $\alpha_n = 2014$ να έχει λύση φυσικό αριθμό.

Έχουμε λοιπόν:

$$\alpha_n = 2014 \Leftrightarrow$$

$$2n + 1 = 2014 \Leftrightarrow$$

$$n = \frac{2013}{2} = 1006,5 \text{ που δεν είναι φυσικός αριθμός}$$

Άρα δεν υπάρχει όρος της προόδου που να ισούται με 2014.

γ) $S = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{15} = 3 + 7 + 11 + \dots + 31$

Οι όροι του αθροίσματος είναι όροι αριθμητικής προόδου με $\beta_1 = 3$ και $\omega' = 4$. Πρέπει να βρούμε το πλήθος τους. Έχουμε $\beta_n = 31 \Leftrightarrow 3 + (n-1) \cdot 4 = 31 \Leftrightarrow 4n = 32 \Leftrightarrow n = 8$. Οπότε το πλήθος των όρων είναι 8.

$$\text{Οπότε } S = S_8 = \frac{8}{2} [2 \cdot 3 + (8-1) \cdot 4] = 136$$