

Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot \eta\mu\beta x$, με α, β ακέραιους θετικούς αριθμούς.

α) Να βρείτε την τιμή του α , αν η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι 2.

(Μονάδες 6)

β) Αν $\alpha = 2$, να δείξετε ότι η μικρότερη τιμή του β για την οποία είναι $f\left(\frac{\pi}{16}\right) = 2$ είναι $\beta = 8$.

(Μονάδες 10)

γ) Αν $\alpha = 2$ και $\beta = 8$, να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$ στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(Μονάδες 9)

Λύση

α) Για την συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot \eta\mu\beta x$ με α θετικό ακέραιο μέγιστη τιμή είναι το α , άρα $\alpha = 2$.

Εναλλακτικά έχουμε ότι η μέγιστη τιμή του $\eta\mu\beta x$ είναι 1, άρα αν $\alpha \cdot \eta\mu\beta x = 2$, πρέπει $\alpha = 2$

β) Η συνάρτηση από το α) ερώτημα είναι $f(x) = 2 \cdot \eta\mu\beta x$, άρα

$$f\left(\frac{\pi}{16}\right) = 2 \Leftrightarrow 2\eta\mu\frac{\beta\pi}{16} = 2 \Leftrightarrow \eta\mu\frac{\beta\pi}{16} = 1.$$

Λύνουμε την εξίσωση

$$\eta\mu\frac{\beta\pi}{16} = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\frac{\beta\pi}{16} = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\beta\pi}{16} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z} \text{ (η λύση } \frac{\beta\pi}{16} = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{2}$$

ταυτίζεται με την προηγούμενη).

Απλοποιώντας το π έχουμε $\frac{\beta}{16} = 2\kappa + \frac{1}{2}$, η μικρότερη θετική τιμή του β που ζητάμε θα

είναι όταν ο κ , ως ακέραιος, γίνει ίσος με 0 (για αρνητικές τιμές του κ το β γίνεται αρνητικό). Οπότε $\frac{\beta}{16} = 2\kappa + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\beta}{16} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \beta = 8$.

γ) Η εξίσωση $f(x) = 1$ από τα προηγούμενα ερωτήματα είναι:

$$2 \cdot \eta\mu 8x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu 8x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu 8x = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ 8x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\kappa\pi}{4} + \frac{\pi}{48} \\ x = \frac{\kappa\pi}{4} + \frac{5\pi}{48} \end{cases}, \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z}$$

Αφού πρέπει $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ λύνουμε τις παρακάτω δύο ανισώσεις:

$$\text{i) } 0 \leq \frac{\kappa\pi}{4} + \frac{\pi}{48} \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \left(\frac{\kappa}{4} + \frac{1}{48}\right)\pi \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\kappa}{4} + \frac{1}{48} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{48} \leq \frac{\kappa}{4} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{48} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{48} \leq \frac{\kappa}{4} \leq \frac{23}{48} \Leftrightarrow -\frac{4}{48} \leq \kappa \leq \frac{4 \cdot 23}{48} \Leftrightarrow -\frac{1}{12} \leq \kappa \leq \frac{23}{12}.$$

Αφού $\kappa \in \mathbb{Z}$, είναι $\kappa = 0$ ή $\kappa = 1$ δηλαδή δεκτές είναι οι γωνίες $x = \frac{\pi}{48} \text{ rad}$ ή

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{48} = \frac{13\pi}{48} \text{ rad}.$$

$$\text{ii) } 0 \leq \frac{\kappa\pi}{4} + \frac{5\pi}{48} \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \left(\frac{\kappa}{4} + \frac{5}{48}\right)\pi \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\kappa}{4} + \frac{5}{48} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{5}{48} \leq \frac{\kappa}{4} \leq \frac{1}{2} - \frac{5}{48} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{5}{48} \leq \frac{\kappa}{4} \leq \frac{19}{48} \Leftrightarrow -\frac{4 \cdot 5}{48} \leq \kappa \leq \frac{4 \cdot 19}{48} \Leftrightarrow -\frac{5}{12} \leq \kappa \leq \frac{19}{12}.$$

Αφού $\kappa \in \mathbb{Z}$, είναι $\kappa=0$ ή $\kappa=1$ δηλαδή δεκτές είναι οι γωνίες $x = \frac{5\pi}{48} \text{ rad}$ ή

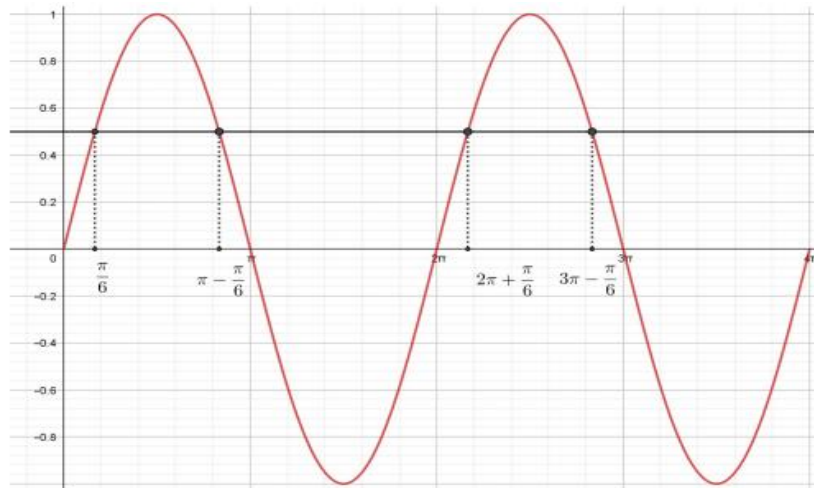
$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{48} = \frac{17\pi}{48} \text{ rad}.$$

Εναλλακτικά, όπως στην προηγούμενη λύση, έχουμε $\eta\mu 8x = \frac{1}{2}$. Επειδή $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, θα είναι

$0 \leq 8x \leq 4\pi$. Οι αριθμοί των οποίων το ημίτονο είναι ίσο με $\frac{1}{2}$ στο διάστημα αυτό είναι οι:

$\frac{\pi}{6}, \pi - \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6}, 3\pi - \frac{\pi}{6}$, όπως προκύπτει από την παρακάτω γραφική παράσταση της

συνάρτησης $\eta\mu\omega$.



Άρα:

$$8x = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{48}$$

$$8x = \pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{48}$$

$$8x = 2\pi + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{13\pi}{48}$$

$$8x = 3\pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{17\pi}{48}.$$