Θέμα 27

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^5 - 4x^3 - x^2 + \alpha x + \beta$ το οποίο διαιρούμενο με το $x^2 - 4$ δίνει υπόλοιπο $4x + 1$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x^2 - 4)$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις τιμές των α και β.

(Μονάδες 7)

γ) Έστω $\alpha = 4$ και $\beta = 5$. Αν το πηλίκο της διαίρεσης $P(x):(x^2 - 4)$ είναι το $\pi(x) = x^3 - 1$, τότε:

i. να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x^2 - 4)$.

(Μονάδες 4)

ii. να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 4x + 1$.

(Μονάδες 7)

Λύση

α) Η διαίρεση $P(x):(x^2 - 4)$ φαίνεται παρακάτω

$$
\begin{array}{r|l}
x^5 - 4x^3 - x^2 + \alpha x + \beta & x^2 - 4 \\ \cline{2-2}
-x^5 + 4x^3 \phantom{{}- x^2 + \alpha x + \beta} & x^3 - 1 \\ \cline{1-1}
-x^2 + \alpha x + \beta & \\
x^2 \phantom{{}+ \alpha x} - 4 & \\ \cline{1-1}
\alpha x + \beta - 4 &
\end{array}
$$

β) Από το α) ερώτημα έχουμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x^2 - 4)$ είναι το πολυώνυμο $\alpha x + \beta - 4$. Όμως από την εκφώνηση δίνεται ότι είναι το πολυώνυμο $4x + 1$. Συνεπώς τα πολυώνυμα $\alpha x + \beta - 4$ και $4x + 1$ πρέπει να είναι ίσα, δηλαδή $\alpha = 4$ και $\beta = 5$.

γ) Για $\alpha = 4$ και $\beta = 5$ έχουμε $\mathrm{P}(x) = x^5 - 4x^3 - x^2 + 4x + 5$.

i. Η ταυτότητα της διαίρεσης $\mathrm{P}(x):(x^2-4)$ είναι $\mathrm{P}(x) = (x^2-4)(x^3-1)+4x+1$.

ii. Αξιοποιώντας την ταυτότητα της διαίρεσης που βρήκαμε παραπάνω έχουμε $\mathrm{P}(x) < 4x+1 \Leftrightarrow (x^2-4)(x^3-1)+4x+1 < 4x+1 \Leftrightarrow (x^2-4)(x-1)(x^2+x+1) < 0$.

Το πρόσημο του πολυωνύμου $\Pi(x) = (x^2-4)(x-1)(x^2+x+1)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
x^2-4		+	0	-		-	0	+	
$x-1$		-		-	0	+		+	
x^2+x+1		+		+		+		+	
$\Pi(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

Συνεπώς η ζητούμενη ανίσωση αληθεύει για κάθε $x \in (-\infty, -2) \cup (1, 2)$.