

Θέμα 27

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - 2x - 8$

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x
(Μονάδες 10)

β) Αν $\kappa = -\frac{8889}{4444}$, είναι η τιμή της παράστασης: $\kappa^2 - 2\kappa - 8$ μηδέν, θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 8)

γ) Αν ισχύει $-4 < \mu < 4$, τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο της τιμής της παράστασης:

$$\mu^2 - 2|\mu| - 8;$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 7)

Λύση

α) Το τριώνυμο $x^2 - 2x - 8$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -2$, $\gamma = -8$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{2+6}{2} = 4 \\ \frac{2-6}{2} = -2 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$	
$x^2 - 2x - 8$	+	○	-	○	+

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 - 2x - 8 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 4 \Leftrightarrow x \in (-2, 4)$$

$$x^2 - 2x - 8 > 0 \Leftrightarrow (x < -2 \text{ ή } x > 4) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$$

β) Ισχύει ότι:

$$\kappa = -\frac{8889}{4444} = -\frac{8888+1}{4444} = -\left(\frac{8888}{4444} + \frac{1}{4444}\right) = -2 - \frac{1}{4444} < -2$$

Από τον πίνακα προσήμων του σκέλους (i) διαπιστώνουμε ότι για $\kappa < -2$ είναι:

$$\kappa^2 - 2\kappa - 8 > 0$$

γ) Η δοθείσα παράσταση γράφεται:

$$\mu^2 - 2|\mu| - 8 = |\mu|^2 - 2|\mu| - 8$$

Επομένως προκύπτει από το αρχικό τριώνυμο θέτοντας $x = |\mu|$.

Από το δεδομένο $-4 < \mu < 4$ συμπεραίνουμε ότι:

$$-4 < \mu < 4 \Leftrightarrow |\mu| < 4 \Leftrightarrow 0 \leq |\mu| < 4$$

Από τον πίνακα προσήμων του σκέλους (α) διαπιστώνουμε ότι για $0 \leq |\mu| < 4$ είναι:

$$|\mu|^2 - 2|\mu| - 8 < 0$$