

Θέμα 26

Μια ποσότητα Q ραδιενεργού υλικού (σε κιλά) θάβεται και με την πάροδο του χρόνου t (σε έτη), μειώνεται ακολουθώντας το νόμο της εκθετικής μεταβολής $Q(t) = Q_0 \cdot e^{-ct}$. Γνωρίζουμε ότι μετά από δύο χρόνια έχει απομείνει το $\frac{1}{3}$ της αρχικής ποσότητας και μετά από τέσσερα χρόνια έχει απομείνει 1 κιλό.

α) Να δείξετε ότι $Q(t) = Q_0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την αρχική ποσότητα που θάφτηκε (για $t = 0$).

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε μετά από πόσα χρόνια η ποσότητα που θα έχει απομείνει θα είναι $\frac{1}{81}$ κιλά.

(Μονάδες 9)

Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι μετά από δύο χρόνια έχει απομείνει το $\frac{1}{3}$ της αρχικής ποσότητας,

δηλαδή:

$$Q(2) = \frac{1}{3} \cdot Q_0 \Leftrightarrow Q_0 \cdot e^{-2c} = \frac{Q_0}{3} \Leftrightarrow (e^{-c})^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow e^{-c} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \text{ Οπότε}$$

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{-ct} \Leftrightarrow$$

$$Q(t) = Q_0 \cdot (e^{-c})^t \Leftrightarrow$$

$$Q(t) = Q_0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t.$$

β) Γνωρίζουμε ότι μετά από τέσσερα χρόνια έχει απομείνει 1 κιλό ραδιενεργού υλικού και από το α) ερώτημα γνωρίζουμε επίσης ότι $Q(t) = Q_0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t$. Ζητούμενη είναι η αρχική ποσότητα που θάφτηκε, δηλαδή το Q_0 .

$$\text{Επομένως: } Q(4) = 1 \Leftrightarrow Q_0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 = 1 \Leftrightarrow Q_0 \cdot \left(\frac{1}{9}\right) = 1 \Leftrightarrow Q_0 = 9 \text{ κιλά.}$$

γ) Στα ερωτήματα α) και β) δείξαμε ότι $Q(t) = 9 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t$. Έχουμε

$$Q(t) = \frac{1}{81} \Leftrightarrow$$

$$9 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t = \frac{1}{81} \Leftrightarrow$$

$$3^2 \cdot \left(3^{-\frac{1}{2}}\right)^t = 3^{-4} \Leftrightarrow$$

$$3^{2-\frac{t}{2}} = 3^{-4} \Leftrightarrow$$

$$2 - \frac{t}{2} = -4 \Leftrightarrow$$

$$\frac{t}{2} = 6 \Leftrightarrow t = 12.$$

Συνεπώς μετά από 12 χρόνια η ποσότητα που θα έχει απομείνει θα είναι $\frac{1}{81}$ κιλά.