

Θέμα 25

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$.

(Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε την παράσταση $f(\ln 2) + f(\ln \frac{1}{2})$.

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι $f(\eta\mu\theta) + f(\eta\mu(\pi + \theta)) = 0$, για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ με $\eta\mu\theta \neq 0$.

(Μονάδες 7)

Λύση

α) Η συνάρτηση f ορίζεται για κάθε πραγματική τιμή του x για την οποία ισχύει $x \neq 0$.

Συνεπώς το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

β) Για κάθε $x \in A$ και $-x \in A$. Επίσης,

$$f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{-x} = -\frac{x^2+1}{x} = -f(x), \text{ για κάθε } x \in A, \text{ που σημαίνει ότι η συνάρτηση } f$$

είναι περιττή, δηλαδή η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$.

γ) Είναι $\ln \frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$ και αφού f περιττή είναι $f(\ln \frac{1}{2}) = f(-\ln 2) = -f(\ln 2)$,

$$\text{δηλαδή } f(\ln 2) + f(\ln \frac{1}{2}) = 0.$$

δ) Για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ είναι $\eta\mu(\pi + \theta) = -\eta\mu\theta$ και αφού f περιττή είναι

$$f(\eta\mu(\pi + \theta)) = f(-\eta\mu\theta) = -f(\eta\mu\theta), \text{ δηλαδή } f(\eta\mu\theta) + f(\eta\mu(\pi + \theta)) = 0.$$