

Θέμα 25

Οι αριθμοί $\kappa-2$, 2κ και $7\kappa+4$, $\kappa \in \mathbb{N}$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου (α_n) .

α) Να αποδείξετε ότι $\kappa=4$ και να βρείτε το λόγο λ της προόδου. (Μονάδες 12)

β) i) Να εκφράσετε το 2° όρο, τον 5° και τον 4° όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του α_1 . (Μονάδες 6)

ii) Να αποδείξετε ότι $\alpha_2 + \alpha_5 = 4(\alpha_1 + \alpha_4)$. (Μονάδες 7)

Λύση

α) Οι αριθμοί $\kappa - 2$, 2κ και $7\kappa + 4$, είναι με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned}(2\kappa)^2 &= (\kappa - 2) \cdot (7\kappa + 4) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4\kappa^2 &= 7\kappa^2 + 4\kappa - 14\kappa - 8 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3\kappa^2 - 10\kappa - 8 &= 0 \quad (1)\end{aligned}$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\begin{aligned}\Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = \\ &= (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-8) = \\ &= 100 + 96 = 196 > 0\end{aligned}$$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις:

$$\kappa_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{196}}{2 \cdot 3} = \frac{10 \pm 14}{6} = \begin{cases} \frac{10+14}{6} = 4 \\ \frac{10-14}{6} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Η τιμή $\kappa = -\frac{2}{3} < 0$ απορρίπτεται. Άρα $\kappa = 4$.

Για $\kappa = 4$ οι αριθμοί γράφονται 2, 8, 32 οπότε ο λόγος είναι $\lambda = \frac{8}{2} = 4$.

β) i) Είναι:

$$\alpha_2 = \alpha_1 \lambda^{2-1} = 4\alpha_1, \quad \alpha_4 = \alpha_1 \lambda^{4-1} = \alpha_1 4^3 = 64\alpha_1, \quad \alpha_5 = \alpha_1 \lambda^{5-1} = \alpha_1 4^4 = 256\alpha_1$$

ii) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}\alpha_2 + \alpha_5 &= \\ &= 4\alpha_1 + 256\alpha_1 = \\ &= 4(\alpha_1 + 64\alpha_1) = \\ &= 4(\alpha_1 + \alpha_4)\end{aligned}$$