Θέμα 24

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\cdot\eta\mu\beta x$, με α, β ακέραιους θετικούς αριθμούς.

α) Να βρείτε την τιμή του α, αν η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι 2.

(Μονάδες 6)

β) Αν $\alpha=2$, να δείξετε ότι η μικρότερη τιμή του β για την οποία είναι $f\left(\frac{\pi}{16}\right)=2$ είναι $\beta=8$.

(Μονάδες 10)

γ) Αν $\alpha=2$ και $\beta=8$, να λύσετε την εξίσωση $f(x)=1$ στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

(Μονάδες 9)

Λύση

α) Για την συνάρτηση $f(x)=\alpha\cdot\eta\mu\beta x$ με α θετικό ακέραιο μέγιστη τιμή είναι το α, άρα $\alpha=2$.

Εναλλακτικά έχουμε ότι η μέγιστη τιμή του $\eta\mu\beta x$ είναι 1, άρα αν $\alpha\cdot\eta\mu\beta x=2$, πρέπει $\alpha=2$

β) Η συνάρτηση από το α) ερώτημα είναι $f(x)=2\cdot\eta\mu\beta x$, άρα

$$f\left(\frac{\pi}{16}\right)=2\Leftrightarrow 2\eta\mu\frac{\beta\pi}{16}=2\Leftrightarrow \eta\mu\frac{\beta\pi}{16}=1.$$

Λύνουμε την εξίσωση

$\eta\mu\frac{\beta\pi}{16}=1\Leftrightarrow\eta\mu\frac{\beta\pi}{16}=\eta\mu\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\frac{\beta\pi}{16}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$, με $\kappa\in\mathbb{Z}$ (η λύση $\frac{\beta\pi}{16}=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{2}$ ταυτίζεται με την προηγούμενη).

Απλοποιώντας το π έχουμε $\frac{\beta}{16}=2\kappa+\frac{1}{2}$, η μικρότερη θετική τιμή του β που ζητάμε θα είναι όταν ο κ, ως ακέραιος, γίνει ίσος με 0 (για αρνητικές τιμές του κ το β γίνεται αρνητικό). Οπότε $\frac{\beta}{16}=2\kappa+\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\beta}{16}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\beta=8$.

γ) Η εξίσωση $f(x)=1$ από τα προηγούμενα ερωτήματα είναι:

$$2\cdot\eta\mu 8x=1\Leftrightarrow\eta\mu 8x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\eta\mu 8x=\eta\mu\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\begin{cases}8x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\\8x=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\kappa\pi}{4}+\frac{\pi}{48}\\x=\frac{\kappa\pi}{4}+\frac{5\pi}{48}\end{cases},\text{ με }\kappa\in\mathbb{Z}$$

Αφού πρέπει $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ λύνουμε τις παρακάτω δύο ανισώσεις:

i) $0 \le \frac{\kappa\pi}{4} + \frac{\pi}{48} \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \le \left(\frac{\kappa}{4} + \frac{1}{48}\right)\pi \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \le \frac{\kappa}{4} + \frac{1}{48} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{48} \le \frac{\kappa}{4} \le \frac{1}{2} - \frac{1}{48} \Leftrightarrow$

$-\frac{1}{48} \le \frac{\kappa}{4} \le \frac{23}{48} \Leftrightarrow -\frac{4}{48} \le \kappa \le \frac{4 \cdot 23}{48} \Leftrightarrow -\frac{1}{12} \le \kappa \le \frac{23}{12}$.

Αφού $\kappa \in \mathbb{Z}$, είναι $\kappa = 0$ ή $\kappa = 1$ δηλαδή δεκτές είναι οι γωνίες $x = \frac{\pi}{48} rad$ ή $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{48} = \frac{13\pi}{48} rad$.

ii) $0 \le \frac{\kappa\pi}{4} + \frac{5\pi}{48} \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \le \left(\frac{\kappa}{4} + \frac{5}{48}\right)\pi \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \le \frac{\kappa}{4} + \frac{5}{48} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{5}{48} \le \frac{\kappa}{4} \le \frac{1}{2} - \frac{5}{48} \Leftrightarrow$

$-\frac{5}{48} \le \frac{\kappa}{4} \le \frac{19}{48} \Leftrightarrow -\frac{4 \cdot 5}{48} \le \kappa \le \frac{4 \cdot 19}{48} \Leftrightarrow -\frac{5}{12} \le \kappa \le \frac{19}{12}$.

Αφού $\kappa \in \mathbb{Z}$, είναι $\kappa = 0$ ή $\kappa = 1$ δηλαδή δεκτές είναι οι γωνίες $x = \frac{5\pi}{48} rad$ ή $x = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{48} = \frac{17\pi}{48} rad$.