

Θέμα 23

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 5x + 6$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

β) Δίνεται η εξίσωση

$$\frac{1}{4}x^2 + (2 - \lambda)x + \lambda - 2 = 0 \quad (1) \text{ με παράμετρο } \lambda.$$

i) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

(Μονάδες 10)

ii) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι ρίζες της (1) είναι ομόσημοι αριθμοί.

(Μονάδες 5)

Λύση

α) Το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -5$, $\gamma = 6$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
$x^2 - 5x + 6$	+	○	-	○	+

Επομένως ισχύει:

$$x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow (x < 2 \text{ ή } x > 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty) \text{ και}$$

$$x^2 - 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3$$

β) i) Το τριώνυμο $\frac{1}{4}x^2 + (2 - \lambda)x + \lambda - 2$ έχει $\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta = 2 - \lambda$, $\gamma = \lambda - 2$ και διακρίνουσα:

$$\begin{aligned} \Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = (2 - \lambda)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot (\lambda - 2) = \\ &= \lambda^2 - 4\lambda + 4 - \lambda + 2 = \\ &= \lambda^2 - 5\lambda + 6 \end{aligned}$$

Η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned}\Delta > 0 &\Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 > 0 \stackrel{(a)}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow (\lambda < 2 \text{ ή } \lambda > 3) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)\end{aligned}$$

ii) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda-2}{\frac{1}{4}} = 4(\lambda-2)$$

Η εξίσωση (1) έχει ομόσημες ρίζες, αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned}(\Delta \geq 0 \text{ και } P > 0) &\Leftrightarrow (\lambda^2 - 5\lambda + 6 \geq 0 \text{ και } 4(\lambda - 2) > 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\lambda \leq 2 \text{ ή } \lambda \geq 3 \text{ και } \lambda > 2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda \geq 3 \Leftrightarrow \lambda \in [3, +\infty)\end{aligned}$$