

Θέμα 22

Ο Διονύσης γράφει στο τετράδιό του τους αριθμούς 3, 7, 11, 15,... και συνεχίζει προσθέτοντας κάθε φορά το 4. Σταματάει όταν έχει γράψει τους 40 πρώτους από τους αριθμούς αυτούς.

α) Είναι οι παραπάνω αριθμοί διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

β) Να βρείτε το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών. (Μονάδες 7)

γ) Είναι ο αριθμός 120 ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

δ) Ο Γιώργος πήρε το τετράδιο του Διονύση και συνέχισε να γράφει διαδοχικούς όρους της ίδιας αριθμητικής προόδου, από εκεί που είχε σταματήσει ο Διονύσης μέχρι να εμφανιστεί ο αριθμός 235. Να βρείτε το άθροισμα των αριθμών που έγραψε ο Γιώργος.

(Μονάδες 7)

Λύση

α) Επειδή κάθε όρος που προστίθεται προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού, οι αριθμοί που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με $a_1 = 3$ και $\omega = 4$.

β) Είναι:

$$\begin{aligned} S_{40} &= \frac{40}{2}[2a_1 + (40 - 1)\omega] = \\ &= 20(2 \cdot 3 + 39 \cdot 4) = 20(6 + 156) = \\ &= 20 \cdot 162 = 3240 \end{aligned}$$

γ) Για να είναι ο αριθμός 120 ένας από τους 40 αυτούς αριθμούς, πρέπει να υπάρχει φυσικός αριθμός n , ώστε:

$$\begin{aligned} a_n = 120 &\Leftrightarrow a_1 + (n - 1)\omega = 120 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3 + (n - 1)4 = 120 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3 + 4n - 4 = 120 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4n = 121 \Leftrightarrow n = \frac{121}{4} \end{aligned}$$

Ο αριθμός $\frac{121}{4}$ δεν είναι φυσικός και επομένως δεν μπορεί ο αριθμός 120 να είναι όρος της αριθμητικής προόδου.

δ) Θα βρούμε ποιος όρος της προόδου είναι ο αριθμός 235. Είναι:

$$a_n = 235 \Leftrightarrow a_1 + (n - 1)\omega = 235 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 + (n - 1)4 = 235 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 + 4n - 4 = 235 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4n = 236 \Leftrightarrow n = 59$$

Τότε:

$$\begin{aligned} S_{59} &= \frac{59}{2}(a_1 + a_{59}) = \frac{59}{2}(3 + 235) = \\ &= \frac{59}{2} \cdot 238 = \frac{14042}{2} = 7021 \end{aligned}$$

Το ζητούμενο άθροισμα είναι:

$$S = S_{59} - S_{40} = 7021 - 3240 = 3781$$