

Θέμα 21

Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 2$.

α) Να αποδείξετε ότι:

- Ο αριθμός 0 δεν είναι ρίζα του.
- Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα του, τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα του.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε ένα θετικό ακέραιο αριθμό που να είναι ρίζα του.

(Μονάδες 5)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 7)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

(Μονάδες 5)

Λύση

α) i. Επειδή $P(0) = 2 \neq 0$, το πολυώνυμο δεν έχει λύση τον αριθμό 0.

ii. Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου, τότε ισχύει $P(\rho) = 0$ δηλαδή

$$2\rho^4 - 5\rho^3 + 4\rho^2 - 5\rho + 2 = 0, (1).$$

Για να αποδείξουμε ότι ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα του, αρκεί να δείξουμε ότι $P\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0$.

Πραγματικά, είναι:

$$P\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{2}{\rho^4} - \frac{5}{\rho^3} + \frac{4}{\rho^2} - \frac{5}{\rho} + 2 = \frac{1}{\rho^4}(2 - 5\rho + 4\rho^2 - 5\rho^3 + 2\rho^4) = 0$$

λόγω της (1).

β) Επειδή οι μοναδικοί θετικοί ακέραιοι αριθμοί που μπορεί να είναι ρίζες του είναι οι θετικοί διαιρέτες του 2, με $x = 2$ έχουμε:

$$P(2) = 2 \cdot 16 - 5 \cdot 8 + 4 \cdot 4 - 5 \cdot 2 + 2 = 50 - 50 = 0$$

οπότε ο αριθμός 2 είναι θετική ακέραια ρίζα του πολυωνύμου.

γ) Η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει ρίζα τον αριθμό 2 και λόγω του ερωτήματος α) έχει ρίζα

και τον αριθμό $\frac{1}{2}$.

Έτσι, με τη βοήθεια του σχήματος

Horner έχουμε:

$$P(x) = (x - 2)(2x^3 - x^2 + 2x - 1)$$

και αν επαναλάβουμε τη διαδικασία για το

πολυώνυμο $2x^3 - x^2 + 2x - 1$ με το $\frac{1}{2}$

2	-5	4	-5	2	2
	4	-2	4	-2	
2	-1	2	-1	0	

2	-1	2	-1	$\frac{1}{2}$
	1	0	1	
2	0	2	0	

$$P(x) = (x-2)\left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 2) = (x-2)(2x-1)(x^2 + 1)$$

οπότε

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = \frac{1}{2}.$$

δ) Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $x^2 + 1 > 0$, το πρόσημο του πολυωνύμου είναι ίδιο με το πρόσημο του τριωνύμου $(x-2)(2x-1)$. Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμων.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$	
$(x-2)(2x-1)$	+	0	-	0	+

Από τον πίνακα προκύπτει ότι λύση της ανίσωσης $P(x) < 0$ είναι κάθε αριθμός του

διαστήματος $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.