

Θέμα 20

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{(x+2)(x+1)^2}{1+(x+2)x}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 4)

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

(Μονάδες 8)

γ) Αν είναι $f(x) = x+2$, $x \neq -1$, τότε:

i. Να βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνει η γραφική παράσταση της f τη γραφική παράσταση της $g(x) = x^2$.

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες, η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g .

(Μονάδες 6)

Λύση

α) Η συνάρτηση ορίζεται για τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει:

$$1 + (x+2)x \neq 0, \text{ δηλαδή}$$

$$x^2 + 2x + 1 \neq 0, \text{ οπότε}$$

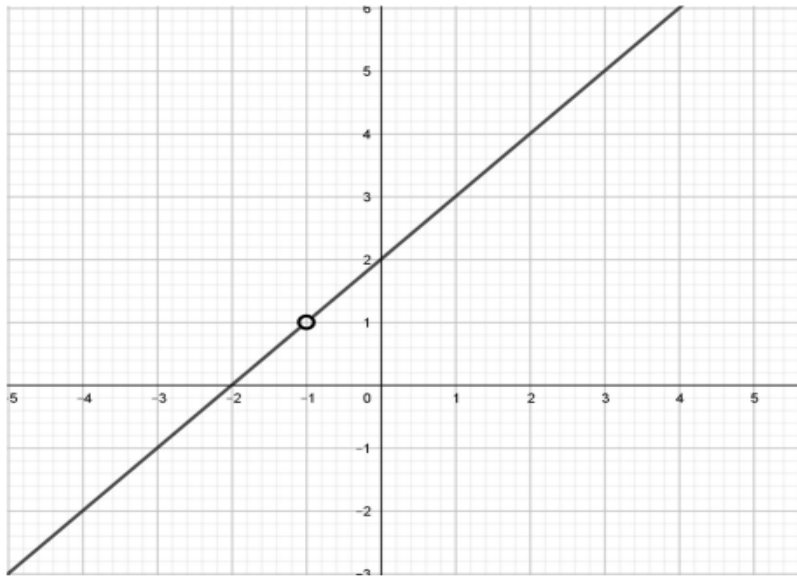
$$(x+1)^2 \neq 0 \text{ και τελικά}$$

$$x \neq -1.$$

Άρα $A_f = \mathbb{R} - \{-1\}$.

β) Έχουμε: $f(x) = \frac{(x+2)(x+1)^2}{1+(x+2)x} = \frac{(x+2)(x+1)^2}{(x+1)^2} = x+2$ και η γραφική της παράσταση

είναι ευθεία με εξίσωση $y = x+2$ και $x \neq -1$.



γ)

i. Η γραφική παράσταση της f τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε σημεία των οποίων οι τετμημένες είναι λύσεις της εξίσωσης: $x+2 = x^2$, για $x \neq -1$.

Έχουμε λοιπόν $x+2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$ που είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες που έχουν άθροισμα $-\frac{-1}{1} = 1$ και γινόμενο $\frac{-2}{1} = -2$. Άρα $x_1 = 2$ και $x_2 = -1$ (απορρίπτεται).

Άρα οι γραφικές παραστάσεις έχουν ένα κοινό σημείο, το $(2, 4)$, αφού $f(2) = g(2) = 4$.

ii. Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g για τις τιμές του x οι οποίες είναι λύσεις της ανίσωσης:

$$x+2 > x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 < 0.$$

Η ανίσωση είναι 2^{ου} βαθμού με $\alpha = 1 > 0$ και ρίζες $x_1 = 2$ και $x_2 = -1$, οπότε αληθεύει για $x \in (-1, 2)$.