Θέμα 18

Για της ανάγκες ενός αρχιτεκτονικού σχεδίου ενός κτηρίου, απαιτείται η κατασκευή μιας μακέτας ενός πάρκου, σχήματος ορθογώνιου ΑΒΓΔ, με διαστάσεις x και $2x - 1$, όπου $x > \frac{1}{2}$.

α) Να εκφράσετε την περίμετρο Π και το εμβαδόν Ε της μακέτας σε συνάρτηση του x.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνονται οι διαστάσεις της μακέτας, ώστε η περίφραξη του πάρκου στη μακέτα, να μη ξεπερνά τα 8 μέτρα.

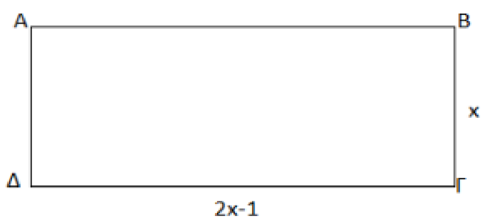
(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τις τιμές του x, ώστε το εμβαδόν της μακέτας, να είναι το πολύ 1 τετραγωνικό μέτρο.

(Μονάδες 10)

Λύση

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η μακέτα του πάρκου



α) Για τη περίμετρο της μακέτας έχουμε:

$$\Pi(x) = 2x + 2(2x - 1) = 6x - 2 \quad , \text{ με } x > \frac{1}{2}$$

Και για το εμβαδόν της:

$$E(x) = x(2x - 1) = 2x^2 - x \text{ με } x > \frac{1}{2}.$$

β) Στη περίφραξη του πάρκου εμπλέκεται η περίμετρος που δίνεται από τον τύπο

$\Pi(x) = 6x - 2$. Αρκεί $\Pi(x) \le 8$ ή $6x - 2 \le 8 \Leftrightarrow 6x \le 10 \Leftrightarrow x \le \frac{5}{3}$.

και για το 2x-1 προκύπτει $2 \cdot x \le 2 \cdot \frac{5}{3} \Leftrightarrow -1 < 2x - 1 \le \frac{10}{3} - 1 \Leftrightarrow 2x - 1 \le \frac{7}{3}$.

Επειδή οι διαστάσεις παίρνουν μόνο θετικές τιμές με $x > \frac{1}{2}$, οι τιμές τους κυμαίνονται :

$$\frac{1}{2} < x \le \frac{5}{3} \quad \text{και} \quad 0 < 2x - 1 \le \frac{7}{3}.$$

γ) Το εμβαδόν της μακέτας δίνεται από το τύπο $\mathrm{E(x)} = 2\mathrm{x}^2 - \mathrm{x}$.

Αρκεί $\mathrm{E(x)} \leq 1$ ή $2\mathrm{x}^2 - \mathrm{x} \leq 1$ τότε $2\mathrm{x}^2 - \mathrm{x} - 1 \leq 0$ (1).

Παρατηρούμε πως το τριώνυμο της ανίσωσης (1) μηδενίζεται για $\mathrm{x}_1 = 1$ και $\mathrm{x}_2 = -\frac{1}{2}$ και

επειδή το α=2 >0 προκύπτει:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2 - x - 1$		+	0	-	0	+	

Σύμφωνα με τον πίνακα πρόσημών το τριώνυμο θα είναι ετερόσημο του α, δηλαδή αρνητικό

για $-\frac{1}{2} \leq \mathrm{x} \leq 1$.

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης (1) είναι $\mathrm{x} \in [-\frac{1}{2}, 1]$.

Επειδή $x > \frac{1}{2}$ τότε $\mathrm{x} \epsilon (\frac{1}{2}, 1]$.