

Θέμα 16

Ο Θεωδωρής γράφει διαδοχικά και επαναλαμβανόμενα τα γράμματα της λέξης «ΑΛΓΕΒΡΑ».

Στην πρώτη θέση το Α, στη δεύτερη το Λ, κοκ. Έτσι, σχηματίζεται η διαδοχή γραμμάτων

ΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑ...

α) Να αποδείξετε ότι οι θέσεις, στην διαδοχή, όπου συναντάμε το γράμμα Β σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο (α_n) με $\alpha_1 = 5$ και να βρείτε τη διαφορά της.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε σε ποια θέση της διαδοχής συναντάμε για $23^{\text{η}}$ φορά το γράμμα Β.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το γράμμα που βρίσκεται στην $200^{\text{η}}$ θέση στην παραπάνω διαδοχή.

(Μονάδες 9)

Λύση

α) Το γράμμα Β υπάρχει ακριβώς μια φορά στη λέξη «ΑΛΓΕΒΡΑ». Την πρώτη φορά που το συναντάμε είναι στην $5^{\text{η}}$ θέση της διαδοχής και επειδή η λέξη έχει 7 γράμματα, η δεύτερη εμφάνιση του γράμματος Β είναι στην $12^{\text{η}}$ θέση και κάθε εμφάνισή του είναι 7 θέσεις μετά την προηγούμενη. Έτσι, η ακολουθία που σχηματίζουν οι θέσεις που συναντάμε το γράμμα Β είναι αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = 5$ και $\omega = 7$.

β) Αρκεί να βρούμε τον $23^{\text{ο}}$ όρο της προόδου. Είναι:

$$\alpha_{23} = \alpha_1 + 22\omega = 5 + 22 \cdot 7 = 5 + 154 = 159$$

Επομένως, η $23^{\text{η}}$ φορά που συναντάμε το γράμμα Β είναι στην $159^{\text{η}}$ θέση.

γ) Αν διαιρέσουμε τον αριθμό 200 με το 7, βρίσκουμε πηλίκο 28 και υπόλοιπο 4, οπότε $200 = 7 \cdot 28 + 4$. Έτσι, μέχρι την $196^{\text{η}}$ θέση έχουμε 28 φορές επανάληψη της λέξης «ΑΛΓΕΒΡΑ» οπότε το γράμμα που βρίσκεται στην $200^{\text{η}}$ θέση είναι το $4^{\text{ο}}$ γράμμα της λέξης, δηλαδή είναι το γράμμα Ε.