Θέμα 15

Σε ένα πείραμα εργαστηρίου, ο αριθμός των βακτηρίων δίνεται από τον τύπο

$$P(t)=200\cdot e^{ct},$$

Όπου t ο χρόνος σε ώρες από την αρχή του πειράματος ($t=0$). Σε μία ώρα ο αριθμός των βακτηρίων ήταν 328.

(Δίνεται ότι $\ln(1{,}64)\cong 0{,}5$ και $\ln 10\cong 2{,}3$)

α) Να βρείτε τον αριθμό των βακτηρίων όταν ξεκίνησε το πείραμα.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $c=\frac{1}{2}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ο αριθμός των βακτηρίων είναι μεγαλύτερος από το δεκαπλάσιο και μικρότερος από το εκατονταπλάσιο της αρχικής του τιμής.

(Μονάδες 9)

Λύση

α) Ο αριθμός των βακτηρίων όταν ξεκίνησε το πείραμα ήταν $P(0)=200\cdot e^{c\cdot 0}=200$ βακτήρια.

β) Έχουμε:

$$P(1)=328 \Leftrightarrow 200\cdot e^{c\cdot 1}=328 \Leftrightarrow e^{c}=\frac{328}{200} \Leftrightarrow e^{c}=1{,}64 \Leftrightarrow c=\ln(1{,}64) \Leftrightarrow c=0{,}5.$$

Άρα $c=\frac{1}{2}$.

γ) Ο αριθμός των βακτηρίων είναι μεγαλύτερος από το δεκαπλάσιο και μικρότερος από το εκατονταπλάσιο της αρχικής του τιμής, δηλαδή

$$\begin{aligned}
&10\cdot P(0)<P(t)<100\cdot P(0) \Leftrightarrow\\
&10\cdot 200<200\cdot e^{\frac{1}{2}t}<100\cdot 200 \Leftrightarrow\\
&10<e^{\frac{1}{2}t}<100 \overset{\ln x\nearrow}{\Leftrightarrow}\\
&\ln 10<\ln(e^{\frac{1}{2}t})<\ln 100 \Leftrightarrow\\
&\ln 10<\frac{1}{2}\cdot t<\ln 10^{2} \Leftrightarrow\\
&2\cdot\ln 10<t<4\cdot\ln 10 \Leftrightarrow\\
&2\cdot 2{,}3<t<4\cdot 2{,}3 \Leftrightarrow\\
&4{,}6<t<9{,}2.
\end{aligned}$$

Άρα το ζητούμενο χρονικό διάστημα (σε ώρες) είναι $4{,}6<t<9{,}2$.