Θέμα 15

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - x - 12$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι $\left(\frac{\pi+9}{3}\right)^2 - \left(\frac{\pi+9}{3}\right) - 12 > 0$, όπου $\pi = 3,1415...$.

(Μονάδες 9)

γ) Αν για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει ότι $(|\alpha|+3)^2 - (|\alpha|+3) - 12 < 0$, να δείξετε ότι $\alpha \in (-1,1)$.

(Μονάδες 8)

Λύση

α) Το τριώνυμο $x^2 - x - 12$ έχει $\Delta = 1 - 4\cdot(-12) = 1 + 48 = 49$ και δύο ρίζες άνισες, τις

$$x_1 = \frac{-(-1)+\sqrt{49}}{2\cdot 1} = \frac{1+7}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad , \quad x_2 = \frac{-(-1)-\sqrt{49}}{2\cdot 1} = \frac{1-7}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

Το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - x - 12$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
$x^2 - x - 12$		+	0	-	0	+	

Δηλαδή

$$x^2 - x - 12 < 0 \text{ για κάθε } x \in (-3,4) \text{ και}$$

$$x^2 - x - 12 > 0 \text{ για κάθε } x \in (-\infty,-3) \cup (4,+\infty).$$

β) Είναι $\pi > 3 \Leftrightarrow \pi + 9 > 12 \Leftrightarrow \frac{\pi+9}{3} > 4$, οπότε με βάση το α) έχουμε ότι

$$\left(\frac{\pi+9}{3}\right)^2 - \left(\frac{\pi+9}{3}\right) - 12 > 0$$

γ) Η παράσταση $(|\alpha|+3)^2 - (|\alpha|+3) - 12$ είναι η τιμή του τριωνύμου για $x = |\alpha| + 3$ και για να είναι αρνητική θα πρέπει :

$-3 < |\alpha| + 3 < 4 \Leftrightarrow -6 < |\alpha| < 1 \Leftrightarrow |\alpha| < 1 \Leftrightarrow -1 < \alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha \in (-1,1)$.