

### Θέμα 14

Σε ένα ανοιχτό δοχείο υπάρχουν 10 λίτρα ενός υγρού. Το υγρό εξατμίζεται έτσι ώστε ο όγκος του να μειώνεται κατά 15% ανά εβδομάδα.

α) Να βρείτε την ποσότητα του υγρού που υπάρχει στο δοχείο στο τέλος της 1<sup>ης</sup> και στο τέλος της 2<sup>ης</sup> εβδομάδας.

(Μονάδες 8)

β) Ο όγκος  $V$  του υγρού μετά από  $t$  εβδομάδες δίνεται από τη συνάρτηση  $V(t) = V_0 \cdot \alpha^t$ , όπου  $V_0$  και  $\alpha$  σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τους αριθμούς  $V_0$  και  $\alpha$ .

(Μονάδες 8)

γ) Αν ο όγκος του υγρού μετά από  $t$  εβδομάδες δίνεται από τη σχέση  $V(t) = 10 \cdot (0,85)^t$ , να βρείτε τότε ο όγκος του υγρού που υπάρχει στο δοχείο είναι μικρότερος από το μισό της αρχικής του τιμής. (Δίνεται ότι:  $\log(0,5) = -0,3$  και  $\log(0,85) = -0,07$ ).

(Μονάδες 9)

### Λύση

α) Η ποσότητα του υγρού στο δοχείο στο τέλος της 1<sup>ης</sup> εβδομάδας είναι:  
 $10 - \frac{15}{100} \cdot 10 = 10 \cdot (1 - 0,15) = 10 \cdot 0,85 = 8,5$  λίτρα.

Η ποσότητα του υγρού στο δοχείο στο τέλος της 2<sup>ης</sup> εβδομάδας είναι:  
 $(10 \cdot 0,85) - \frac{15}{100} \cdot (10 \cdot 0,85) = (10 \cdot 0,85) \cdot (1 - 0,15) = 10 \cdot (0,85)^2 = 7,225$  λίτρα.

β) Η αρχική ποσότητα του υγρού στο δοχείο (δηλαδή η ποσότητα τη χρονική στιγμή  $t = 0$ ) είναι 10 λίτρα, οπότε  $V(0) = V_0 = 10$ .

Από το α) ερώτημα, ο όγκος  $V$  του υγρού μετά από 1 εβδομάδα είναι  $V(1) = 10 \cdot 0,85 \Leftrightarrow V_0 \cdot \alpha^1 = 10 \cdot 0,85 \Leftrightarrow 10 \cdot \alpha = 10 \cdot 0,85 \Leftrightarrow \alpha = 0,85$ .

γ) Θα βρούμε μετά από πόσες εβδομάδες ο όγκος του υγρού που υπάρχει στο δοχείο είναι μικρότερος από το μισό της αρχικής του τιμής, δηλαδή θα βρούμε τις τιμές του  $t$  ώστε:

$$V(t) < \frac{V_0}{2} \Leftrightarrow$$

$$10 \cdot (0,85)^t < \frac{10}{2} \Leftrightarrow$$

$$(0,85)^t < 0,5 \Leftrightarrow$$

$$\log(0,85)^t < \log(0,5) \Leftrightarrow$$

$$t \cdot (-0,07) < -0,3 \Leftrightarrow$$

$$t > \frac{0,3}{0,07} \Leftrightarrow t > \frac{30}{7} \Leftrightarrow t > 4\frac{2}{7}.$$

Άρα μετά από  $4\frac{2}{7}$  εβδομάδες (4 εβδομάδες και 2 ημέρες) ο όγκος του υγρού που υπάρχει στο δοχείο είναι μικρότερος από το μισό της αρχικής του τιμής.