

Θέμα 13

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot 2^x + \beta$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1,3)$ και $B(2,13)$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β .

(Μονάδες 7)

Αν $\alpha = 5$ και $\beta = -7$,

β) Να βρείτε το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

(Μονάδες 7)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 4^x - 3$.

(Μονάδες 7)

Λύση

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1,3)$ και $B(2,13)$, οπότε:

$$\begin{cases} f(1) = 3 \\ f(2) = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \cdot 2^1 + \beta = 3 \\ \alpha \cdot 2^2 + \beta = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = 3 \\ 4\alpha + \beta = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = 10 \\ 2\alpha + \beta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = -7 \end{cases}$$

β) Για $\alpha = 5$ και $\beta = -7$ η συνάρτηση γίνεται $f(x) = 5 \cdot 2^x - 7$ και για $x=0$ έχουμε $f(0) = 5 \cdot 2^0 - 7 = 5 \cdot 1 - 7 = -2$. Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, -2)$.

γ) Παρατηρούμε ότι για $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, έχουμε

$$2^{x_1} < 2^{x_2} \Leftrightarrow$$

$$5 \cdot 2^{x_1} < 5 \cdot 2^{x_2} \Leftrightarrow$$

$$5 \cdot 2^{x_1} - 7 < 5 \cdot 2^{x_2} - 7 \Leftrightarrow$$

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα η $f(x) = 5 \cdot 2^x - 7$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση.

δ) Έχουμε

$$f(x) > 4^x - 3 \Leftrightarrow$$

$$5 \cdot 2^x - 7 > (2^x)^2 - 3 \Leftrightarrow$$

$$y^2 - 5y + 4 < 0 \quad (1).$$

Το τριώνυμο $y^2 - 5y + 4$ έχει ρίζες $y_1 = 4$, $y_2 = 1$ (διότι $1+4=5=S$ και $1 \cdot 4 = 4 = P$). Η ανίσωση (1) αληθεύει για $1 < y < 4$, δηλαδή:

$$1 < 2^x < 4 \Leftrightarrow 2^0 < 2^x < 2^2 \Leftrightarrow 0 < x < 2.$$

Τελικά η ανίσωση $f(x) > 4^x - 3$ αληθεύει για $x \in (0, 2)$.