

Θέμα 13

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$ και $g(x) = |x + 3|$.

Να βρείτε:

α) τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 10)

β) τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g .

(Μονάδες 7)

γ) τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g .

(Μονάδες 8)

Λύση

α) Η συνάρτηση f ορίζεται για $x^2 - 4x - 5 \geq 0$ με $x \in \mathbb{R}$.

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = (-4)^2 - 4(-5) = 36 > 0$ επομένως έχει δύο άνισες ρίζες $x_1 = \frac{-(-4)+6}{2} = 5$ και $x_2 = \frac{-(-4)-6}{2} = -1$. Το $a=1>0$ και προκύπτει:

x	$-\infty$	-1	5	$+\infty$	
$x^2 - 4x - 5$	$+$	0	$-$	0	$+$

Σύμφωνα με τον πίνακα προσήμων η ανίσωση $x^2 - 4x - 5 \geq 0$ αληθεύει

για $x \leq -1$ ή $x \geq 5$.

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι $A_f = (-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$.

Η συνάρτηση g ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα το πεδίο ορισμού της g είναι $A_g = \mathbb{R}$.

β) Για να βρούμε τα κοινά σημεία των C_f και C_g θα λύσουμε την εξίσωση

$f(x) = g(x)$, και θα προκύψουν οι κοινές τετμημένες τους. Έχουμε:

$$\sqrt{x^2 - 4x - 5} = |x + 3| \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = |x + 3|^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = x^2 + 6x + 9 \Leftrightarrow -10x = 14 \Leftrightarrow x = \frac{-7}{5}.$$

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων έχουν ένα κοινό σημείο το $(\frac{-7}{5}, \frac{8}{5})$.

γ) Οι τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g

προκύπτουν από την λύση της ανίσωσης

$$\sqrt{x^2 - 4x - 5} < |x + 3| \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 < |x + 3|^2 \Leftrightarrow -10x < 14 \Leftrightarrow x > \frac{-7}{5}.$$

Επειδή έχουμε τον περιορισμό $x \leq -1$ ή $x \geq 5$ άρα $x \in (\frac{-7}{5}, -1] \cup [5, +\infty)$.