

## Θέμα 12

Όταν ένας ασθενής παίρνει μια δόση ενός φαρμάκου τη χρονική στιγμή  $t=0$ , τότε ο οργανισμός του το μεταβολίζει έτσι ώστε η ποσότητά του  $f(t)$  (σε mg) να μειώνεται μετά από  $t$  ημέρες σύμφωνα με τη συνάρτηση

$$f(t) = q_0 \cdot \alpha^t, \quad t \geq 0,$$

όπου οι αριθμοί  $\alpha, q_0$  είναι κατάλληλες θετικές σταθερές.

α) Να εξηγήσετε τι παριστάνει η σταθερά  $q_0$  στο πλαίσιο του προβλήματος και να αιτιολογήσετε γιατί ισχύει  $0 < \alpha < 1$ .

(Μονάδες 6)

β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία ημέρα μετά τη λήψη του φαρμάκου, η ποσότητά του στον οργανισμό του ασθενούς έχει υποδιπλασιαστεί.

i. Να αποδείξετε ότι  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

(Μονάδες 5)

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης  $f$ , εκφράζοντας τις τιμές  $f(t)$  ως συνάρτηση της αρχικής τιμής  $q_0$ .

(Μονάδες 4)

$t$	0	1	2	3	4	5	6
$f(t)$	$q_0$	$\frac{q_0}{2}$					

γ) Υποθέτουμε τώρα ότι  $\alpha = \frac{1}{2}$  και ότι η ποσότητα του φαρμάκου που παραμένει στον οργανισμό στο τέλος της 4<sup>ης</sup> ημέρας είναι 25 mg.

i. Να υπολογίσετε την ποσότητα της δόσης που πήρε ο ασθενής.

(Μονάδες 5)

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  στο διάστημα  $[0, 6]$ .

(Μονάδες 5)

---

## Λύση

α) Στο πλαίσιο του προβλήματος η σταθερά  $q_0$  παριστάνει τη δόση του φαρμάκου που πήρε ο ασθενής (την ποσότητα του φαρμάκου στον οργανισμό τη χρονική στιγμή  $t = 0$ ). Η ποσότητα του φαρμάκου που παραμένει στον οργανισμό του ασθενούς μειώνεται όσο περνούν οι ημέρες, δηλαδή η εκθετική συνάρτηση  $f(t) = q_0 \cdot \alpha^t$  είναι φθίνουσα, το οποίο συμβαίνει όταν  $0 < \alpha < 1$ .

β)

i. Μία ημέρα μετά τη λήψη του φαρμάκου, η ποσότητά του στον οργανισμό του ασθενούς έχει υποδιπλασιαστεί, δηλαδή

$$f(1) = \frac{q_0}{2} \Leftrightarrow$$

$$q_0 \cdot \alpha = \frac{q_0}{2} \Leftrightarrow$$

$$\alpha = \frac{1}{2}.$$

ii. Παρατηρούμε ότι:

$$f(0) = q_0 \cdot \alpha^0 = q_0, \quad f(1) = q_0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{q_0}{2}, \quad f(2) = q_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{q_0}{4}, \quad f(3) = q_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{q_0}{8},$$

$$f(4) = q_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{q_0}{16}, \quad f(5) = q_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{q_0}{32}, \quad f(6) = q_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{q_0}{64}.$$

Οπότε:

$t$	0	1	2	3	4	5	6
$f(t)$	$q_0$	$\frac{q_0}{2}$	$\frac{q_0}{4}$	$\frac{q_0}{8}$	$\frac{q_0}{16}$	$\frac{q_0}{32}$	$\frac{q_0}{64}$

γ)

i. Έχουμε  $f(4) = 25 \Leftrightarrow \frac{q_0}{16} = 25 \Leftrightarrow q_0 = 25 \cdot 16 \Leftrightarrow q_0 = 400$  mg.

ii. Με τη βοήθεια του βii) ερωτήματος έχουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών για τη

συνάρτηση  $f(t) = 400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$  στο διάστημα  $[0, 6]$ :

$t$	0	1	2	3	4	5	6
$f(t)$	400	200	100	50	25	12,5	6,25

Η γραφική παράσταση της  $f$  φαίνεται στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων.



