Θέμα 12

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά ω για την οποία πρόοδο ισχύει η σχέση $\alpha_{20} - \alpha_{10} = 40$, ενώ ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 5$.

α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 4$.

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha_\nu = 4\nu + 1$, όπου ν θετικός ακέραιος.

γ) Να βρείτε τον μικρότερο δυνατό όρο της προόδου, ο οποίος είναι μεγαλύτερος του αριθμού 1589.

δ) Έστω ν τυχαίος θετικός ακέραιος και $k = \nu(\nu + 1)$. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός α_k είναι τετράγωνο θετικού ακέραιου.

Λύση

α) Η δοθείσα σχέση γράφεται $\alpha_1 + 19\omega - (\alpha_1 + 9\omega) = 40$, οπότε $\alpha_1 + 19\omega - \alpha_1 - 9\omega = 40$.

Ώστε $10\omega = 40$, άρα $\omega = 4$.

β) Γνωρίζουμε ότι $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 5 + (\nu - 1)4 = 5 + 4\nu - 4 = 4\nu + 1, \nu \in N^*$.

γ) Ζητάμε την ελάχιστη τιμή του θετικού ακέραιου αριθμού m, ώστε $\alpha_m > 1589$. Πρέπει λοιπόν $4m + 1 > 1589$, δηλαδή $4m > 1588$, άρα $m > 397$. Ώστε ο ζητούμενος όρος είναι ο όρος $\alpha_{398} = 4 \cdot 398 + 1 = 1593$.

δ) Αν ν τυχαίος θετικός ακέραιος, τότε $k = \nu(\nu + 1)$. Άρα $\alpha_k = 4k + 1 = 4\nu(\nu + 1) + 1 =$
$= 4\nu^2 + 4\nu + 1 = (2\nu + 1)^2$.