

### Θέμα 11

Για τη γωνία  $\omega$  του παρακάτω σχήματος ισχύει

$$5\eta\mu^3\omega - 8\eta\mu^2\omega - 7\eta\mu\omega + 6 = 0.$$

α) Να δείξετε ότι  $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$ .

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε:

i. την τιμή του  $\sigma\upsilon\nu\omega$ ,

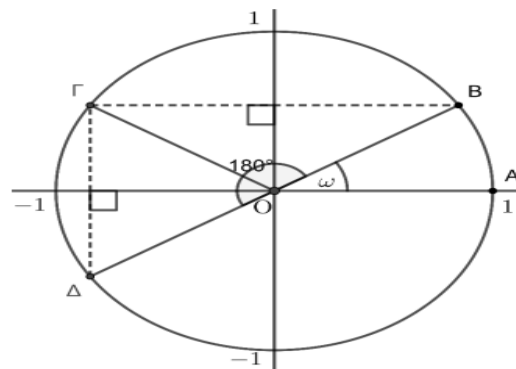
(Μονάδες 6)

ii. τις συντεταγμένες των σημείων  $B$ ,  $\Gamma$  και  $\Delta$ ,

(Μονάδες 6)

iii. το ημίτονο και το συνημίτονο των θετικών γωνιών  $\widehat{AOB}$ ,  $\widehat{AOG}$  και  $\widehat{AOD}$ .

(Μονάδες 5)



### Λύση

α) Θέτουμε  $\eta\mu\omega = x$  και η εξίσωση γράφεται:

$$5x^3 - 8x^2 - 7x + 6 = 0.$$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι οι διαιρέτες του 6, δηλαδή οι  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ .

Με δοκιμή διαπιστώνουμε ότι ο  $-1$  είναι ρίζα. Κάνουμε τη διαίρεση  $(5x^3 - 8x^2 - 7x + 6) : (x + 1)$ .

5	-8	-7	6	-1
	-5	13	-6	
5	-13	6	0	

Άρα  $5x^3 - 8x^2 - 7x + 6 = (x + 1)(5x^2 - 13x + 6)$ .

Το τριώνυμο  $5x^2 - 13x + 6$  έχει διακρίνουσα  $\Delta = (-13)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 6 = 169 - 120 = 49$  και ρίζες:

$$x_1 = \frac{13 + \sqrt{49}}{2 \cdot 5} = \frac{13 + 7}{10} = 2$$

και

$$x_2 = \frac{13 - \sqrt{49}}{2 \cdot 5} = \frac{13 - 7}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Επειδή  $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$ , είναι  $0 < \eta\mu\omega < 1$ , άρα η μόνη αποδεκτή λύση είναι  $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$ .

β)

i. Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 &\Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \\ \sigma\upsilon\nu^2\omega &= 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}\end{aligned}$$

Επειδή  $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$ , είναι  $\sigma\upsilon\nu\omega > 0$ . Άρα,

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

ii. Από τον τριγωνομετρικό κύκλο γνωρίζουμε ότι το σημείο  $B$  έχει συντεταγμένες  $(\sigma\upsilon\nu\omega, \eta\mu\omega)$ , άρα  $B\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ . Τα σημεία  $\Gamma$  και  $\Delta$  είναι συμμετρικά του  $B$  ως προς τον άξονα  $y'y$  και την αρχή  $O$  αντίστοιχα. Οπότε είναι:

$$\Gamma\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right), \Delta\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right).$$

iii. Το ημίτονο και το συνημίτονο των γωνιών  $A\hat{O}B$ ,  $A\hat{O}\Gamma$  και  $A\hat{O}\Delta$  είναι οι τεταγμένες και οι τετμημένες των σημείων  $B$ ,  $\Gamma$  και  $\Delta$  αντίστοιχα. Άρα,

$$\begin{aligned}\eta\mu A\hat{O}B &= \frac{3}{5}, & \sigma\upsilon\nu A\hat{O}B &= \frac{4}{5}, \\ \eta\mu A\hat{O}\Gamma &= \frac{3}{5}, & \sigma\upsilon\nu A\hat{O}\Gamma &= -\frac{4}{5},\end{aligned}$$

και

$$\eta\mu A\hat{O}\Delta = -\frac{3}{5}, \quad \sigma\upsilon\nu A\hat{O}\Delta = -\frac{4}{5}.$$