Θέμα 11

α) Δίνεται το τριώνυμο $x^2-3x+2,\ x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου.

(Μονάδες 10)

β) Θεωρούμε πραγματικούς αριθμούς α,β με $\alpha<\beta$ για τους οποίους ισχύει

$$\left(\alpha^2-3\alpha+2\right)\left(\beta^2-3\beta+2\right)<0\ .$$

i. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha-1$ και $\beta-2$ είναι ομόσημοι .

(Μονάδες 10)

ii. Να δείξετε ότι $|(\alpha-1)(\beta-2)|=(\alpha-1)(\beta-2)$.

(Μονάδες 5)

Λύση

α) Το τριώνυμο x^2-3x+2 έχει $\alpha=1,\beta=-3,\gamma=2$ και διακρίνουσα: $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=1>0$.

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\frac{3\pm1}{2}=\begin{cases}\frac{3+1}{2}=2\\ \frac{3-1}{2}=1\end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		+	0	−	0	+	

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι το τριώνυμο είναι θετικό για $x\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$ και αρνητικό για $x\in(1,2)$.

β)

i. Δεδομένου ότι $\left(\alpha^2-3\alpha+2\right)\left(\beta^2-3\beta+2\right)<0$, διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

1η περίπτωση: $\left(\alpha^2-3\alpha+2\right)<0$ και $\left(\beta^2-3\beta+2\right)>0$,

Από το α) ερώτημα $\alpha\in(1,2)$ και $\beta\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$, δηλαδή $\alpha>1$ και αφού $\alpha<\beta$

θα είναι $\beta>2$,συνεπώς $\alpha-1$ και $\beta-2$ είναι θετικοί, άρα ομόσημοι.

2η περίπτωση: $\left(\alpha^2-3\alpha+2\right)>0$ και $\left(\beta^2-3\beta+2\right)<0$,

Από το α) ερώτημα $\alpha\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$ και $\beta\in(1,2)$ δηλαδή $\beta<2$ και αφού $\alpha<\beta$

Θα είναι $\alpha<1$, συνεπώς $\alpha-1$ και $\beta-2$ είναι αρνητικοί άρα ομόσημοι.

ii. Αφού $\alpha-1$ και $\beta-2$ είναι ομόσημοι, έχουμε ότι $(\alpha-1)(\beta-2)>0$, οπότε:

$$|(\alpha-1)(\beta-2)|=(\alpha-1)(\beta-2).$$