Θέμα 10

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^4 + x^3 + \alpha\, x - 4$ και $\delta(x) = x^2 - 3x + 2$. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $\delta(x)$, είναι το πολυώνυμο $\upsilon(x) = 24x - 24$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού α.

(Μονάδες 8)

β) Για $\alpha = 2$,

i. να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - 1$.

(Μονάδες 2)

ii. να βρείτε τα σημεία τομής του άξονα $x'x$ με την γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$.

(Μονάδες 8)

iii. να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες, η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 7)

Λύση

α) Η διαίρεση του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $\delta(x)$:

$$
\begin{array}{lr|l}
x^4 + x^3 & +\alpha\, x - 4 & x^2 - 3x + 2 \\ \cline{3-3}
-x^4 + 3x^3 - 2x^2 & & x^2 + 4x + 10 \\ \cline{1-2}
4x^3 - 2x^2 & +\alpha\, x - 4 & \\
-4x^3 + 12x^2 & -8\,x & \\ \cline{1-2}
10x^2 & +(\alpha - 8)\, x - 4 & \\
-10x^2 & +30\, x - 20 & \\ \cline{1-2}
 & (\alpha + 22)\, x - 24 &
\end{array}
$$

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι:

$$P(x) = \delta(x) \cdot (x^2 + 4x + 10) + (\alpha + 22)\, x - 24$$

Επομένως πρέπει να ισχύει $(\alpha + 22)\, x - 24 = 24x - 24$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Είναι:

$(\alpha + 22)\, x - 24 = 24x - 24 \Leftrightarrow \alpha + 22 = 24 \Leftrightarrow \alpha = 2.$

β) Για $\alpha = 2$, είναι $P(x) = x^4 + x^3 + 2\,x - 4$.

i. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - 1$ είναι το $P(1) = 0$.

ii. Ζητείται η επίλυση της εξίσωσης $P(x) = 0$.

Είναι: $P(1) = 0 \Leftrightarrow 1$ ρίζα του $P(x) \Leftrightarrow x - 1$ παράγοντας του $P(x)$.

Εφαρμογή του σχήματος Horner:

1	1	0	2	−4	ρ =1
	1	2	2	4	
1	2	2	4	0	

Επομένως ισχύει: $P(x) = (x - 1) \cdot (x^3 + 2x^2 + 2x + 4)$

Αλλά $x^3 + 2x^2 + 2x + 4 = x^2(x + 2) + 2(x + 2) = (x + 2)(x^2 + 2)$.

Τελικά ισχύει $P(x) = (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x^2 + 2)$.

Είναι λοιπόν

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x^2 + 2) = 0 \xLeftrightarrow{x^2 + 2 \neq 0} x = 1 \text{ ή } x = -2.$$

Επομένως, τα σημεία τομής του άξονα $x'x$ με την γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$, είναι τα $A(-2,0)$ και $B(1,0)$.

iii. Ζητείται η επίλυση της ανίσωσης $P(x) < 0$.

Το πρόσημο των τιμών του $P(x)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα προσήμων:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x-1$		−		−	0	+	
$x+2$		−	0	+		+	
x^2+2		+		+		+	
$P(x)$		+	0	−	0	+	

Ως εκ τούτου, $P(x) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 1$.