Θέμα 10

α) Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω ανισότητες ισχύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύουν ως ισότητες.

i. $x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4}$.

(Μονάδες 4)

ii. $x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4}$.

(Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

γ) Δίνεται η παράσταση $A = \frac{(x^3 - 1)(x^3 + 1)}{x^2 - 1}$.

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση A.

(Μονάδες 5)

ii. Με τη βοήθεια του β) ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να εξετάσετε αν η παράσταση A μπορεί να πάρει την τιμή $\frac{9}{16}$.

(Μονάδες 6)

Λύση

α) Ισοδύναμα έχουμε

i. $x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow x^2 + x + 1 - \frac{3}{4} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} \geq 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, που ισχύει.

Ως ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

ii. $x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow x^2 - x + 1 - \frac{3}{4} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} \geq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, που ισχύει.

Ως ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

β) Για $x \neq \frac{1}{2}$ και $x \neq -\frac{1}{2}$, όπως δείξαμε στο α) ερώτημα, είναι $x^2 + x + 1 > \frac{3}{4}$ και $x^2 - x + 1 > \frac{3}{4}$, οπότε με πολλαπλασιασμό κατά μέλη έχουμε $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$.

Επίσης, για $x = \frac{1}{2}$ είναι $x^2 + x + 1 > \frac{3}{4}$ και $x^2 - x + 1 = \frac{3}{4}$, οπότε με πολλαπλασιασμό κατά μέλη έχουμε $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$.

Τέλος, για $x = -\frac{1}{2}$ είναι $x^2 + x + 1 = \frac{3}{4}$ και $x^2 - x + 1 > \frac{3}{4}$, οπότε με πολλαπλασιασμό κατά μέλη έχουμε $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$.

Επομένως $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ)

i. Η παράσταση A ορίζεται για κάθε πραγματική τιμή του x για την οποία ισχύει $x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$.

ii. Είναι

$$A = \frac{(x^3-1)(x^3+1)}{x^2-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)}{(x-1)(x+1)} = (x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{1,-1\}$.

Όπως δείξαμε στο β) είναι $(x^2+x+1)(x^2-x+1) > \frac{9}{16}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε

$A > \frac{9}{16}$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{1,-1\}$ και επομένως η παράσταση A δεν μπορεί να πάρει την τιμή $\frac{9}{16}$.

Εναλλακτικά, θα εξετάσουμε αν η εξίσωση $\frac{(x^3-1)(x^3+1)}{x^2-1} = \frac{9}{16}$ έχει λύση στο $\mathbb{R} - \{1,-1\}$. Είναι ισοδύναμα

$$\begin{aligned}
&\frac{(x^3-1)(x^3+1)}{x^2-1} = \frac{9}{16} \Leftrightarrow \\
&\frac{x^6-1}{x^2-1} = \frac{9}{16} \Leftrightarrow \\
&\frac{(x^2)^3-1}{x^2-1} = \frac{9}{16} \Leftrightarrow \\
&\frac{(x^2-1)(x^4+x^2+1)}{x^2-1} = \frac{9}{16} \Leftrightarrow \\
&16(x^4+x^2+1) = 9 \Leftrightarrow \\
&16x^4+16x^2+16-9 = 0 \Leftrightarrow \\
&16x^4+16x^2+7 = 0
\end{aligned}$$

και επειδή $16x^4+16x^2+7 \geq 7 > 0$, η εξίσωση είναι αδύνατη και επομένως η παράσταση A δεν μπορεί να πάρει την τιμή $\frac{9}{16}$.