Θέμα 1

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 -\lambda x +(\lambda^2+\lambda-1)=0$ (1) , με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό λ, ώστε η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $S^2-P-2\geq 0$, όπου S και P είναι αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της (1). (Μονάδες 13)

Λύση

α) Το τριώνυμο $x^2 - \lambda x + (\lambda^2 + \lambda - 1)$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -\lambda$, $\gamma = \lambda^2 + \lambda - 1$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda^2 + \lambda - 1) =$$
$$= \lambda^2 - 4\lambda^2 - 4\lambda + 4 = -3\lambda^2 - 4\lambda + 4$$

Η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -3\lambda^2 - 4\lambda + 4 \geq 0$$

Το τριώνυμο $-3\lambda^2 - 4\lambda + 4$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta_0 = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 4 = 16 + 48 = 64 > 0$$

και ρίζες τις:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-4)\pm\sqrt{64}}{2\cdot(-3)} = \frac{4\pm8}{-6} = \begin{cases} \frac{4+8}{-6} = -2 \\ \frac{4-8}{-6} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

λ	$-\infty$	-2		$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$-3\lambda^2 - 4\lambda + 4$	$-$	0	$+$	0	$-$

Επομένως ισχύει:

$$-3\lambda^2 - 4\lambda + 4 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq \lambda \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow \lambda \in \left[-2, \frac{2}{3}\right] \ \mathbf{(1)}$$

β) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-\lambda}{1} = \lambda \quad \text{και} \quad P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda^2+\lambda-1}{1} = \lambda^2 + \lambda - 1$$

Τότε:

$$S^2 - P - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda^2 - \lambda + 1 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\lambda - 1 \geq 0 \Leftrightarrow -\lambda \geq 1 \Leftrightarrow \lambda \leq -1 \ \mathbf{(2)}$$

Από συναλήθευση των **(1)** και **(2)** έχουμε $\lambda \in [-2, \ -1]$