Πανεπιστήμιο Πατρών
Τμήμα Φυσικής
Εργαστήριο Ηλεκτρονικής

Ψηφιακά Ηλεκτρονικά

Απλοποίηση Συναρτήσεων Boole

Επιμέλεια Διαφανειών: Δ. Μπακάλης

Πάτρα, Φεβρουάριος 2009

Απλοποίηση Συναρτήσεων Boole

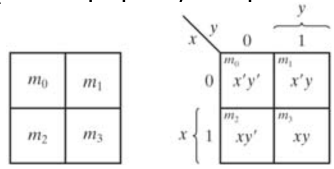
- Η πολυπλοκότητα του κυκλώματος που υλοποιεί μια συνάρτηση Boole σχετίζεται άμεσα με την πολυπλοκότητα της αλγεβρικής έκφρασης από την οποία η συνάρτηση υλοποιείται.
- Αν και η αναπαράσταση μιας συνάρτησης Boole με πίνακα αλήθειας είναι μοναδική, η αλγεβρική της αναπαράσταση μπορεί να πάρει πολλές μορφές.
- Η απλοποίηση συναρτήσεων Boole με χρήση αλγεβρικών μετασχηματισμών είναι δύσχρηστη καθώς δεν έχει συγκεκριμένους κανόνες.
- Η μέθοδος του χάρτη (χάρτης Karnaugh) είναι μια απλή και συστηματική μέθοδος για την απλοποίηση συναρτήσεων Boole σε ελάχιστο πλήθος παραγόντων.

Η Μέθοδος του Χάρτη

- Ο χάρτης είναι ένα διάγραμμα αποτελούμενο από τετράγωνα.
- Κάθε τετράγωνο παριστάνει ένα ελαχιστόρο.
- Μια συνάρτηση Boole αναγνωρίζεται γραφικά στο χάρτη από την περιοχή που καλύπτουν τα τετράγωνα των ελαχιστόρων που περιέχονται στη συνάρτηση.
- Ο χάρτης είναι ένα διάγραμμα όλων των δυνατών τρόπων με τους οποίους μια συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί σε πρότυπη μορφή.

Χάρτης Δυο (2) Μεταβλητών

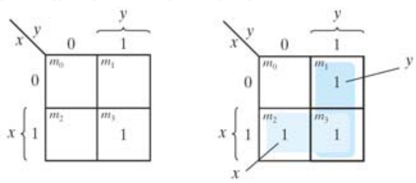
Ο χάρτης περιέχει 4 τετράγωνα, ένα για κάθε ελαχιστόρο.



Το x εμφανίζεται ως συμπλήρωμα στη γραμμή 0 και κανονικά στη γραμμή 1.

Το y εμφανίζεται ως συμπλήρωμα στη στήλη 0 και κανονικά στη στήλη 1.

Παραδείγματα

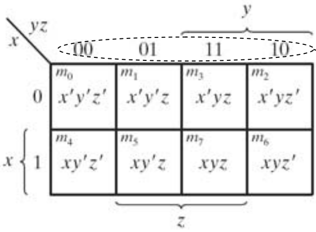


$xy = \Sigma(3) = m_3$ $\quad x+y = \Sigma(1,2,3) = m_1 + m_2 + m_3$

Χάρτης Τριών (3) Μεταβλητών

Ο χάρτης περιέχει 8 τετράγωνα, ένα για κάθε ελαχιστόρο.
Οι ελαχιστόροι τοποθετούνται σε σειρά όμοια με τον κώδικα Gray.

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6



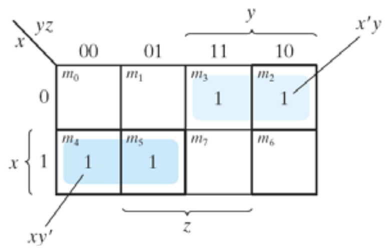
Κάθε δύο γειτονικά τετράγωνα διαφέρουν σε μία μεταβλητή

⇩

Διαγραφή μεταβλητής και απλοποίηση αθροίσματος
πχ. $m_5+m_7 = xy'z+xyz = xz(y'+y) = xz$

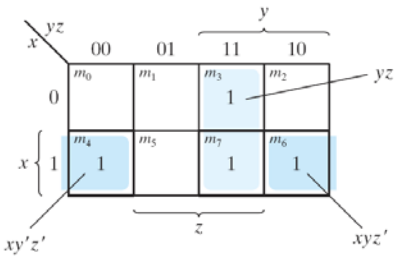
Παραδείγματα Χάρτη Τριών (3) Μεταβλητών

$F(x,y,z) = \Sigma(2,3,4,5)$



$F(x,y,z) = x'y+xy'$

$F(x,y,z) = \Sigma(3,4,6,7)$

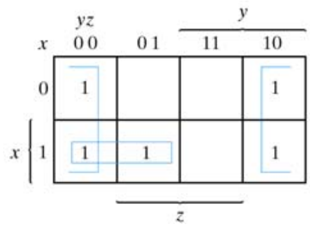


$F(x,y,z) = yz+xz'$

Note: $xy'z' + xyz' = xz'$

Παραδείγματα Χάρτη Τριών (3) Μεταβλητών

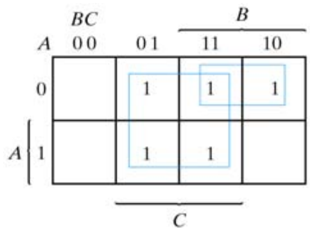
F(x,y,z) = Σ(0,2,4,5,6)



F(x,y,z) = z'+xy'

F(A,B,C) =

A'C+A'B+AB'C+BC



F(A,B,C) =
Σ(1,2,3,5,7) =
C+A'B

Χάρτης Τριών (3) Μεταβλητών

- Το άθροισμα δύο ελαχιστόρων της συνάρτησης που βρίσκονται σε γειτονικά τετράγωνα απλοποιείται σε ένα όρο AND με δύο μόνο παράγοντες.

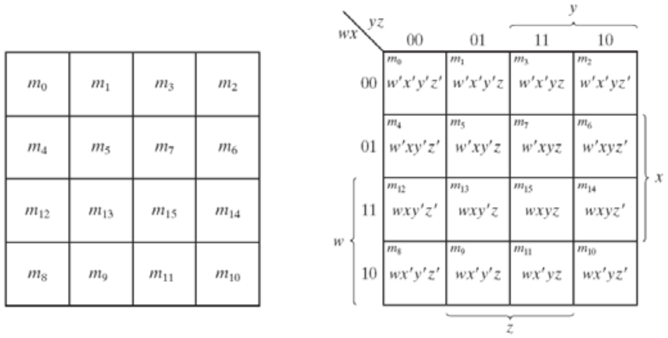
- Το άθροισμα τεσσάρων ελαχιστόρων της συνάρτησης που βρίσκονται σε γειτονικά τετράγωνα απλοποιείται σε ένα όρο με ένα μόνο παράγοντα.

- Το άθροισμα οκτώ ελαχιστόρων της συνάρτησης που βρίσκονται σε γειτονικά τετράγωνα καταλαμβάνει όλο το χάρτη και παριστάνει τη συνάρτηση που είναι πάντα ίση με 1.

Χάρτης Τεσσάρων (4) Μεταβλητών

Ο χάρτης περιέχει 16 τετράγωνα, ένα για κάθε ελαχιστόρο.

Οι ελαχιστόροι τοποθετούνται σε σειρά όμοια με τον κώδικα Gray.



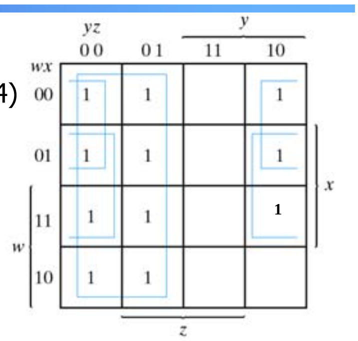
Κάθε 2^n γειτονικά τετράγωνα διαφέρουν σε n μεταβλητές και οδηγούν σε έναν όρο AND με $k – n$ παράγοντες, όπου k το πλήθος μεταβλητών της συνάρτησης.

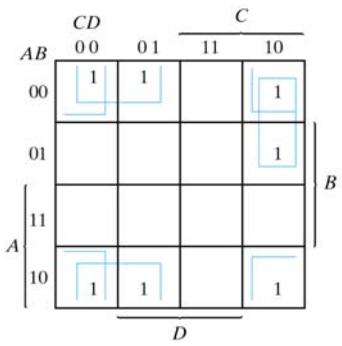
Η πάνω ακμή ακουμπάει στην κάτω και η δεξιά στην αριστερή (γειτονικότητα).

Παραδείγματα Χάρτη Τεσσάρων (4) Μεταβλητών

F(w,x,y,z) = Σ(0, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 13, 14)

F(w,x,y,z) = y' + w'z' + xz'





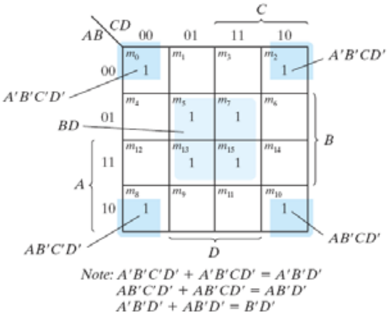
F(A,B,C,D) = A'B'C'+B'CD'+A'BCD'+AB'C'

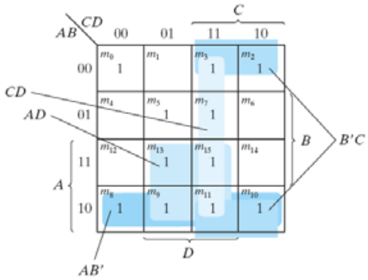
F(A,B,C,D) = B'D' + B'C' + A'CD'

Πρωτεύοντες Όροι (Prime Implicants)

Πρωτεύοντας Όρος (PI): ένα γινόμενο παραγόντων που σχηματίζεται συνδυάζοντας το μεγαλύτερο δυνατό αριθμό γειτονικών τετραγώνων.

Θεμελιώδης PI: όταν καλύπτει ένα ελαχιστόρο που δεν καλύπτει κανένας άλλος prime implicant.





m_3: CD, B'C

m_9: AD, AB'

m_{11}: CD, B'C, AD, AB'

Θεμ. PI: BD, B'D'

PI: CD, B'C, AD, AB'

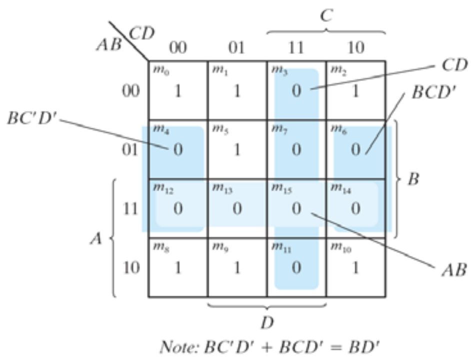
F=(BD+B'D') + (CD+AD) Ή (CD + AB') Ή (B'C+ AD) Ή (B'C+AB')

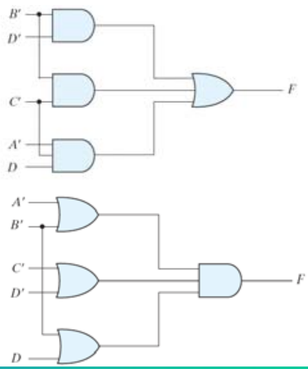
Απλοποίηση Γινομένων Αθροισμάτων

Φτιάχνουμε το χάρτη της F, συνδυάζουμε τα 0 για την F', αντιστρέφουμε την F' με το θεώρημα De Morgan

F(A,B,C,D) = Σ(0,1,2,5,8,9,10), F = B'D' + B'C' + A'C'D

F' = AB + CD + BD' ➔ F = (F')' = (A'+B') (C'+D') (B'+D)

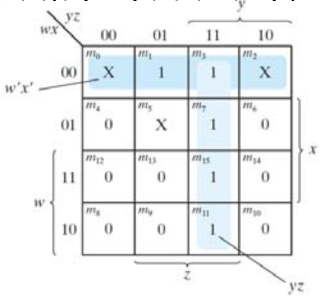


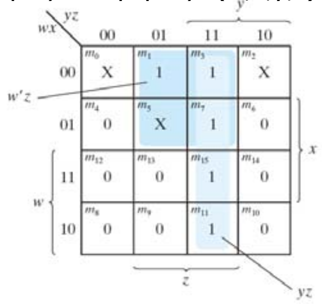


Συνθήκες Αδιαφορίας

Συμβολίζονται με × και αντιστοιχούν σε συνδυασμούς εισόδων που δεν ορίζονται για μία συνάρτηση.

Π.χ. F(w,x,y,z)=Σ(1,3,7,11,15) με συνθήκες αδιαφορίας d(w,x,y,z)=Σ(0,2,5)



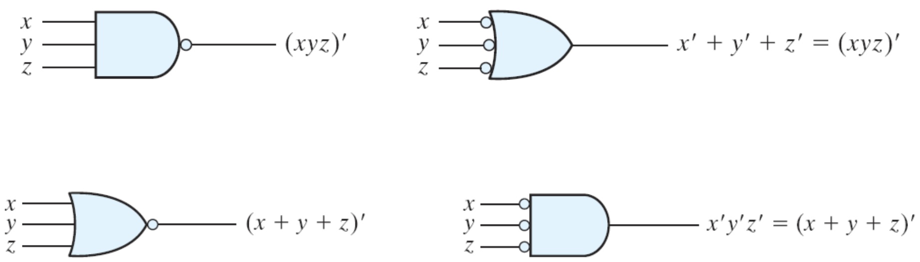


$F = yz + w'x' = \Sigma(\underline{0},1,\underline{2},3,7,11,15)$ $\quad$ $F = yz + w'z = \Sigma(1,3,\underline{5},7,11,15)$

Οι αδιάφοροι όροι μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως άσσοι ή μηδενικά ανάλογα με την απλοποίηση που οδηγεί στο μικρότερο κύκλωμα.

Υλοποίηση με πύλες NAND & NOR

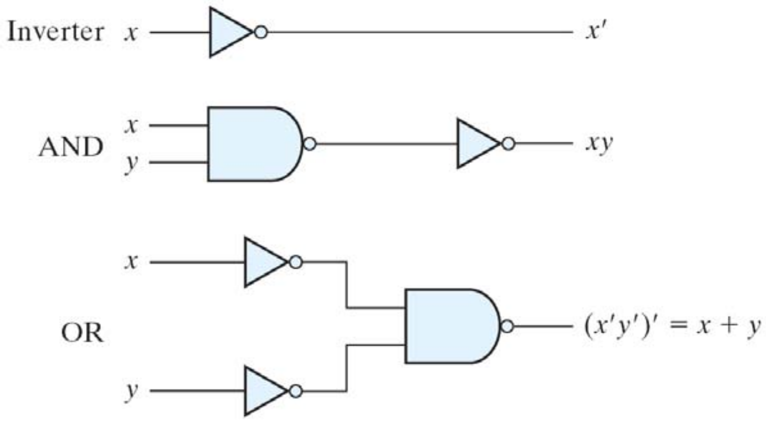
Οι πύλες NAND & NOR χρησιμοποιούνται πολύ συχνότερα από τις AND & OR γιατί κατασκευάζονται ευκολότερα.



(a) OR-invert $\quad$ (b) Invert-AND

Υλοποίηση με πύλες NAND

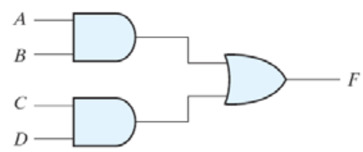
Οικουμενική Πύλη: Κάθε ψηφιακό σύστημα μπορεί να υλοποιηθεί με αυτή.



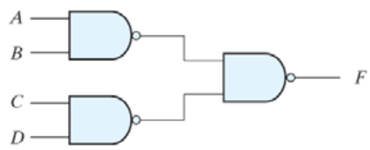
Υλοποίηση με πύλες NAND

Η συνάρτηση θα πρέπει να είναι απλοποιημένη σε άθροισμα γινομένων.

1. Απλοποιούμε τη συνάρτηση σε άθροισμα γινομένων.
2. Σχεδιάζουμε μια πύλη NAND για κάθε όρο γινομένου με >1 παράγοντες.
3. Σχεδιάζουμε μία πύλη NAND στο δεύτερο επίπεδο.
4. Όροι με έναν παράγοντα χρησιμοποιούν αντιστροφέα.

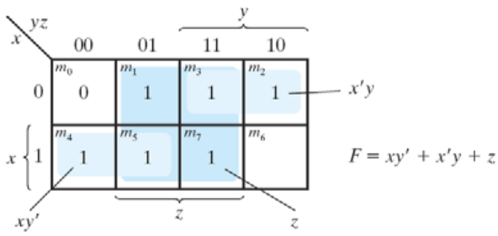


<u>Παράδειγμα:</u> Υλοποίηση της συνάρτησης F=AB+CD με πύλες NAND.

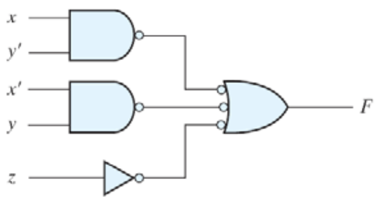


Παράδειγμα Υλοποίησης με πύλες NAND

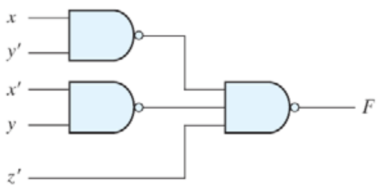
F'(x,y,z) =Σ(0,6)



(a)



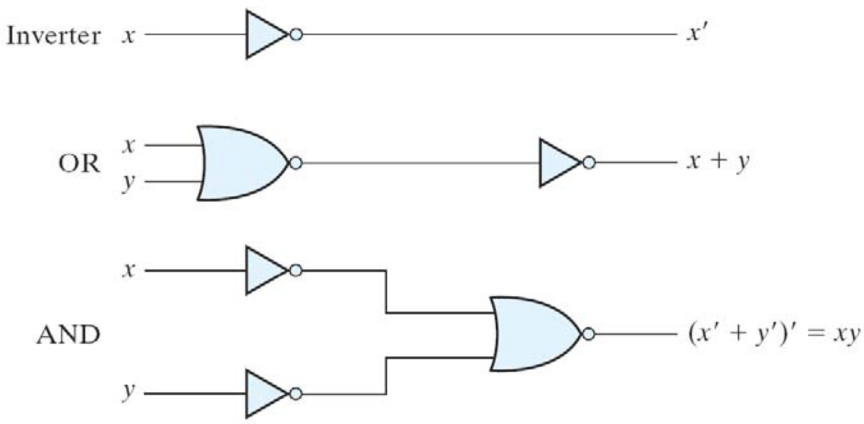
(b)



(c)

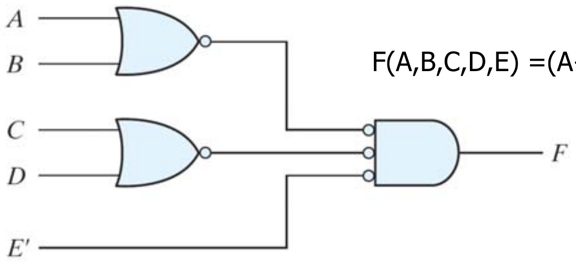
Υλοποίηση με πύλες NOR

Οικουμενική Πύλη: Κάθε ψηφιακό σύστημα μπορεί να υλοποιηθεί με αυτή.



Υλοποίηση με πύλες NOR

Η συνάρτηση NOR είναι το δυϊκό της NAND και άρα οι κανόνες μετατροπής είναι δυϊκοί.



F(A,B,C,D,E) =(A+B)(C+D)E

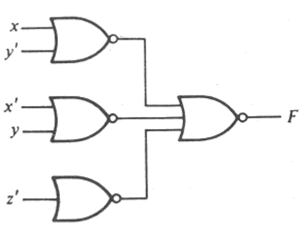
Η συνάρτηση θα πρέπει να είναι απλοποιημένη σε γινόμενο αθροισμάτων.

Παράδειγμα Υλοποίησης με πύλες NOR

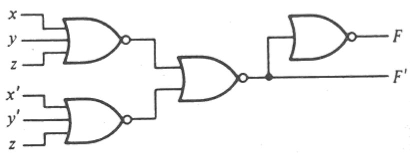
F(x,y,z) = Σ(0,6)

F' = x'y + xy' + z ➔ F = (x + y')(x' + y)z'

F = x'y'z' + xyz' ➔ F' = (x + y+ z)(x' + y' +z)



(α) $F = (x + y')(x' + y)z'$



(β) $F' = (x + y + z)(x' + y' + z)$

Η Συνάρτηση Αποκλειστικό Ή (XOR)

Αποκλειστικό Ή (XOR) $\xLeftrightarrow{\text{Σχ. Αντιστρ.}}$ Αποκλειστικό ΟΥΤΕ (XNOR)

$x \oplus y = x'y + xy'$ $\qquad$ $(x \oplus y)' = xy + x'y'$

➢ Ιδιότητες:

$x \oplus 0 = x \qquad x \oplus 1 = x'$

$x \oplus x = 0 \qquad x \oplus x' = 1$

$x \oplus y' = (x \oplus y)' \qquad x' \oplus y = (x \oplus y)'$

➢ Η πράξη XOR είναι αντιμεταθετική και προσεταιριστική:

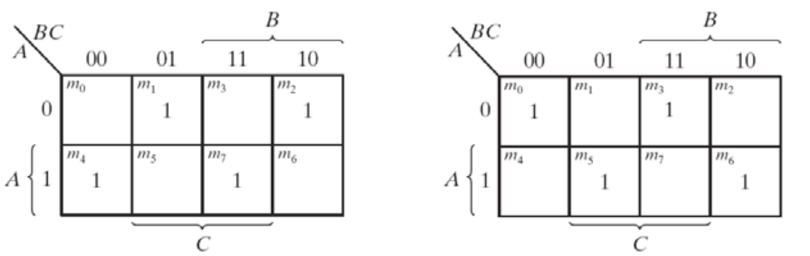
$$A \oplus B = B \oplus A$$

$$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C = A \oplus B \oplus C$$

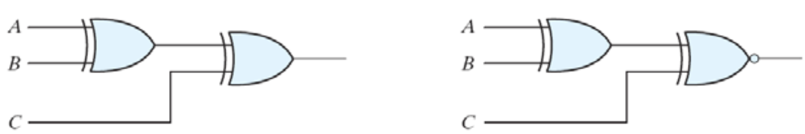
➢ Δεν φτιάχνονται συχνά πύλες XOR με περισσότερες από 2 εισόδους.

Η Συνάρτηση Αποκλειστικό Ή (XOR)

Η συνάρτηση XOR πολλών μεταβλητών είναι περιττή: παίρνει τιμή 1 μόνο όταν περιττός αριθμός εισόδων είναι ίσος με 1.

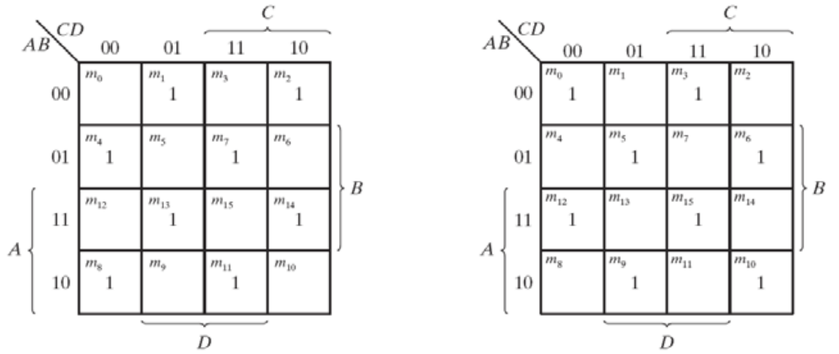


(a) Odd function $F = A \oplus B \oplus C$ $\qquad$ (b) Even function $F = (A \oplus B \oplus C)'$



Η Συνάρτηση Αποκλειστικό Ή (XOR)

Μια συνάρτηση XOR *n* μεταβλητών είναι μια περιττή συνάρτηση που ορίζεται ως το λογικό άθροισμα των $2^n/2$ ελαχιστόρων των οποίων οι δυαδικές αριθμητικές τιμές τους έχουν περιττό αριθμό άσσων.



(a) Odd function $F = A \oplus B \oplus C \oplus D$ (b) Even function $F = (A \oplus B \oplus C \oplus D)'$

Γεννήτρια και Ελεγκτής Ισοτιμίας

Πίνακας Αληθείας για τη Γεννήτρια Άρτιας Ισοτιμίας

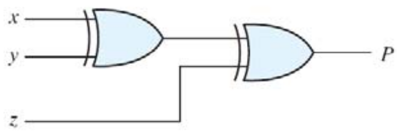
Μήνυμα τριών bits			Bit Ισοτιμίας
x	*y*	*z*	*P*
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

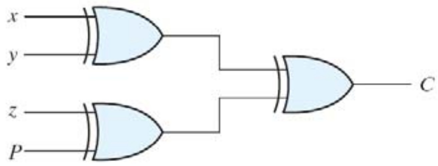
Ελεγκτής Άρτιας Ισοτιμίας

Τέσσερα Bits Δέκτη				Έλεγχος Λάθους Ισοτιμίας
x	*y*	*z*	*P*	*C*
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

Γεννήτρια και Ελεγκτής Ισοτιμίας

Τα κυκλώματα αυτά χρησιμοποιούνται στην ανίχνευση λαθών κατά τη μετάδοση ή λειτουργία των κυκλωμάτων.





Γεννήτρια άρτιας ισοτιμίας 3-bit

Ελεγκτής άρτιας ισοτιμίας 4-bit

Το bit ισοτιμίας είναι περιττή πληροφορία η οποία όμως μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανίχνευση μονού αριθμού λαθών.

Βιβλιογραφία

1. Ψηφιακή Σχεδίαση ($3^{η}$ έκδοση), M. Morris Mano, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, 2005
2. Ψηφιακή Σχεδίαση Αρχές και Πρακτικές, J. Wakerly, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, 2002
3. Digital Design (4^{th} edition), M. Morris Mano & M. Ciletti, Pearson Prentice Hall, 2007