Πανεπιστήμιο Πατρών
Τμήμα Φυσικής
Εργαστήριο Ηλεκτρονικής

Ψηφιακά Ηλεκτρονικά

Άλγεβρα Boole και Λογικές Πύλες

Επιμέλεια Διαφανειών: Δ. Μπακάλης

Πάτρα, Φεβρουάριος 2009

Αξιωματικός Ορισμός Άλγεβρας Boole

Άλγεβρα Boole: είναι μία αλγεβρική δομή πάνω σε ένα σύνολο στοιχείων B μαζί με δύο δυαδικούς τελεστές +, •, όπου ικανοποιούνται τα παρακάτω αξιώματα (Huntington) :

1. Κλειστή ως προς τελεστή +, • : $\alpha \otimes \beta \in B$
2. Ουδέτερο Στοιχείο 0(+), 1(•): $\alpha + 0 = \alpha$, $\alpha \bullet 1 = \alpha$
3. Αντιμεταθετική ως προς +, • : $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, $\alpha \bullet \beta = \beta \bullet \alpha$
4. Επιμεριστική ως προς +, • : $\alpha+(\beta\bullet\gamma)=(\alpha + \beta) \bullet (\alpha + \gamma)$,
   $\alpha \bullet(\beta+\gamma)=(\alpha\bullet\beta)+(\alpha\bullet \gamma)$
5. Συμπλήρωμα ως προς +, • : $\alpha + \alpha' = 1$, $\alpha \bullet \alpha' = 0$
6. Υπάρχουν τουλάχιστον δύο στοιχεία $\alpha, \beta \in B$ με $\alpha \neq \beta$.

Ανάλογα με την επιλογή των στοιχείων του B και των κανόνων λειτουργίας των τελεστών μπορούμε να σχηματίσουμε πολλές άλγεβρες Boole.

Η δίτιμη άλγεβρα Boole

• Σύνολο στοιχείων: B = {0, 1}

• Δυαδικοί τελεστές: + (λογική πράξη OR), • (λογική πράξη AND), και τελεστής συμπληρώματος (λογική πράξη NOT)

AND			OR			NOT	
x	y	$x \cdot y$	x	y	$x + y$	x	x'
0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1		
1	1	1	1	1	1		

• Ισχύουν τα αξιώματα Huntington

Η δίτιμη άλγεβρα Boole

x	y	z	$y + z$	$x \cdot (y + z)$	$x \cdot y$	$x \cdot z$	$(x \cdot y)+(x \cdot z)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

1. Η κλειστότητα προφανώς ισχύει.
2. Τα ουδέτερα στοιχεία είναι 0 για το + και 1 για το • : (0+0=0, 0+1=1+0=1) και (1 • 1=1, 1 • 0=0 • 1=0)
3. Οι αντιμεταθετικοί νόμοι είναι προφανείς από τη συμμετρία.
4. Ο επιμεριστικός νόμος φαίνεται από τον πίνακα.
5. Από τον πίνακα συμπληρώματος έχουμε x+x'=1: 0+0'=0+1=1, 1+1'=1+0=1 και x • x'=0: 0 • 0'=0 • 1=0, 1 • 1'=1 • 0=0
6. Η άλγεβρα έχει τουλάχιστον 2 στοιχεία αφού 1≠0.

B={0, 1}

x	y	x′	x.y	x+y
0	0	1	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

Βασικά θεωρήματα και ιδιότητες

Αξιώματα και θεωρήματα της άλγεβρας Boole

Αξίωμα 2	(a) $x + 0 = x$	(b) $x \cdot 1 = x$
Αξίωμα 5	(a) $x + x' = 1$	(b) $x \cdot x' = 0$
Θεώρημα 1	(a) $x + x = x$	(b) $x \cdot x = x$
Θεώρημα 2	(a) $x + 1 = 1$	(b) $x \cdot 0 = 0$
Θεώρημα 3, (δύο αρνήσεις)	$(x')' = x$	
Αξίωμα 3, αντιμεταθετική	(a) $x + y = y + x$	(b) $xy = yx$
Θεώρημα 4, προσεταιριστική	(a) $x + (y + z) = (x + y) + z$	(b) $x(yz) = (xy)z$
Αξίωμα 4, επιμεριστική	(a) $x(y + z) = xy + xz$	(b) $x + yz = (x + y)(x + z)$
Θεώρημα 5, De Morgan	(a) $(x + y)' = x'y'$	(b) $(xy)' = x' + y'$
Θεώρημα 6, απορρόφηση	(a) $x + xy = x$	(b) $x(x + y) = x$

Δυϊσμός: Ότι ισχύει από τα αξιώματα Huntigton για το + (•) μπορεί να προκύψει από το • (+) με εναλλαγή τελεστών και ουδέτερων στοιχείων.

Μια αληθής αλγεβρική έκφραση παραμένει αληθής αν εναλλάξω τελεστές και ουδέτερα στοιχεία (AND-OR, 0-1)

Αποδείξεις Θεωρημάτων

Τα θεωρήματα αποδεικνύονται:

(α) με χρήση των αξιωμάτων - θεωρημάτων που έχουν ήδη αποδειχθεί, ή

(β) με τη βοήθεια των πινάκων αλήθειας

Παράδειγμα

$x + x$	$= (x + x) \bullet 1$	(Αξίωμα 2b: $x \bullet 1 = x$)
	$= (x + x) \bullet (x + x')$	(Αξίωμα 5a: $x + x' = 1$)
	$= x + x \bullet x'$	(Αξίωμα 4b: $x+yz = (x+y)(x+z)$)
	$= x + 0$	(Αξίωμα 5b: $xx' = 0$)
	$= x$	(Αξίωμα 2a: $x + 0 = x$)

Προτεραιότητα Τελεστών

1. Παρένθεση
2. NOT
3. AND
4. OR

<u>Παραδείγματα</u>

(x + y)': 1) υπολογίζουμε το x + y.
2) παίρνουμε το συμπλήρωμα του αποτελέσματος.

x'y' : 1) παίρνουμε τα συμπληρώματα των x και y.
2) παίρνουμε το AND των συμπληρωμάτων.

Συναρτήσεις Boole

Συνάρτηση: Έκφραση από δυαδικές μεταβλητές, τους δύο δυαδικούς τελεστές OR και AND, τον τελεστή NOT και τις δυαδικές σταθερές 0 και 1.

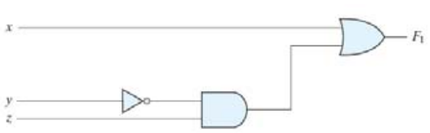
$F_1(x,y,z)=x+y'z$: παίρνει την τιμή 1 μόνο αν x=1 Ή y'z=1 (y=0 ΚΑΙ z=1).

x	y	z	F_1
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Πίνακας αλήθειας

$F_1(x,y,z) = x+y'z$

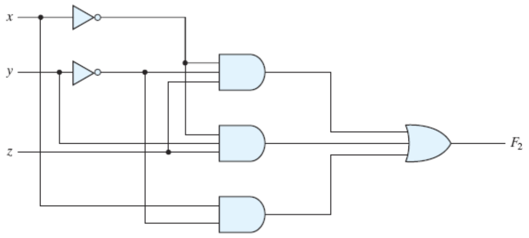
Αλγεβρική μορφή



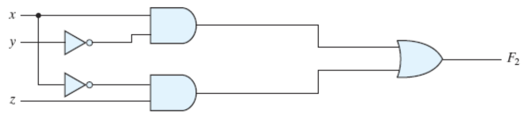
Κύκλωμα

Κάθε συνάρτηση Boole αντιστοιχεί σε έναν και μοναδικό πίνακα αλήθειας.

Υλοποίηση Συναρτήσεων Boole



(a) $F_2 = x'y'z + x'yz + xy'$



(b) $F_2 = xy' + x'z$

$F_2(x,y,z) = x'y'z+x'yz+xy'$

$F_2(x,y,z) = xy'+x'z$

x	y	z	F_2
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Υπάρχουν πολλές αλγεβρικές εκφράσεις με τον ίδιο πίνακα αλήθειας.

Το κύκλωμα που αντιστοιχεί στην απλούστερη αλγεβρική έκφραση είναι προτιμότερο καθώς απαιτεί λιγότερες λογικές πύλες.

Απλοποίηση Συναρτήσεων Boole

Εύρεση απλούστερων εκφράσεων μιας συνάρτησης με χρήση αλγεβρικών μετασχηματισμών.

<u>Παράδειγμα</u>

$$
\begin{aligned}
F_2(x,y,z) &= x'y'z + x'yz + xy' \\
&= x'z\,(y' + y) + xy' \\
&= x'z1 + xy' \\
&= x'z + xy' \\
&= xy' + x'z \\
&= F_2
\end{aligned}
$$

Συμπλήρωμα Συνάρτησης Boole

- Το συμπλήρωμα F' μιας συνάρτησης F είναι η συνάρτηση εκείνη που ισούται με 0 όταν F = 1 και 1 όταν F = 0.

- Το συμπλήρωμα μιας συνάρτησης προκύπτει εφαρμόζοντας τα γενικευμένα θεωρήματα DeMorgan

$$(A + B + C + D + \ldots + F)' = A'B'C'D'\ldots F'$$

$$(ABCD\ldots F)' = A' + B' + C' + D' + \ldots + F'$$

εάν αλλάξουμε τα AND με τα OR και συμπληρώσουμε κάθε παράγοντα.

- Το συμπλήρωμα προκύπτει εύκολα εάν πάρουμε το δυϊκό της συνάρτησης και συγχρόνως το συμπλήρωμα κάθε παράγοντα.

Ελαχιστόροι και Μεγιστόροι

Minterm (Ελαχιστόρος) : Το AND *n* μεταβλητών στην κανονική ή συμπληρωματική τους μορφή.

Παραδείγματα ελαχιστόρων με 4 μεταβλητές:

x y z w, x' y z' w, x y' z w

Maxterm (Μεγιστόρος) : Το OR *n* μεταβλητών στην κανονική ή συμπληρωματική τους μορφή.

Παραδείγματα μεγιστόρων με 4 μεταβλητές:

x + y + z + w, x' + y + z' + w, x + y' + z + w

Ελαχιστόροι και Μεγιστόροι

			Ελαχιστόροι		Μεγιστόροι	
x	y	z	Όρος	Ονομασία	Όρος	Ονομασία
0	0	0	$x'y'z'$	m_0	$x+y+z$	M_0
0	0	1	$x'y'z$	m_1	$x+y+z'$	M_1
0	1	0	$x'yz'$	m_2	$x+y'+z$	M_2
0	1	1	$x'yz$	m_3	$x+y'+z'$	M_3
1	0	0	$xy'z'$	m_4	$x'+y+z$	M_4
1	0	1	$xy'z$	m_5	$x'+y+z'$	M_5
1	1	0	xyz'	m_6	$x'+y'+z$	M_6
1	1	1	xyz	m_7	$x'+y'+z'$	M_7

Για *n* μεταβλητές έχουμε 2^n ελαχιστόρους και μεγιστόρους. Οι μεταβλητές έχουν ανεστραμένες τιμές στους αντίστοιχους ελαχιστόρους / μεγιστόρους

Κάθε ελαχιστόρος είναι το συμπλήρωμα του αντίστοιχου μεγιστόρου και αντίστροφα, π.χ. $m_0=x'y'z'$, $M_0=x+y+z$

Κανονικές Μορφές

Ιδιότητα: Οποιαδήποτε συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα ελαχιστόρων ή γινόμενο μεγιστόρων.

x	y	z	Function f_1
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$$f_1(x,y,z)=x'y'z+xy'z'+xyz \quad \begin{cases} f_1=m_1+m_4+m_7 \\ f_1=M_0M_2M_3M_5M_6 \end{cases}$$

$$f_1'=m_0+m_2+m_3+m_5+m_6$$

$$f_1'=M_1M_4M_7$$

Οι συναρτήσεις Boole που είναι εκφρασμένες ως άθροισμα ελαχιστόρων ή ως γινόμενο μεγιστόρων λέμε ότι είναι σε κανονική μορφή.

Συνάρτηση Boole σε Αθροισμα Ελαχιστόρων

1. Αναπτύσσουμε τη συνάρτηση σε άθροισμα γινομένων.
2. Συμπληρώνουμε κάθε γινόμενο με τις μεταβλητές που λείπουν πολ/ζοντας με μία παράσταση (x + x') για κάθε μεταβλητή που λείπει.

ή εναλλακτικά

1. Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας της συνάρτησης κατ'ευθείαν από την αλγεβρική έκφραση.
2. Παίρνουμε τους ελαχιστόρους από τον πίνακα αλήθειας.

Παράδειγμα

$$
\begin{aligned}
F(A,B,C) &= A + B'C \\
&= A(B + B')(C + C') + (A + A')B'C \\
&= ABC + ABC' + AB'C + AB'C' + AB'C + A'B'C \\
&= A'B'C + AB'C' + AB'C + ABC' + ABC \\
&= m_1 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 = \Sigma(1, 4, 5, 6, 7)
\end{aligned}
$$

Συνάρτηση Boole σε Γινόμενο Μεγιστόρων

1. Αναπτύσσουμε τη συνάρτηση σε γινόμενο αθροισμάτων χρησιμοποιώντας τον επιμεριστικό κανόνα: $x + yz = (x + y)(x + z)$.
2. Συμπληρώνουμε κάθε άθροισμα με τις μεταβλητές που λείπουν προσθέτοντας τον όρο (xx') για κάθε μεταβλητή που λείπει.

ή εναλλακτικά

1. Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας της συνάρτησης κατ'ευθείαν από την αλγεβρική έκφραση.
2. Παίρνουμε τους μεγιστόρους από τον πίνακα αλήθειας.

Παράδειγμα

$$
\begin{aligned}
F(x,y,z) &= xy + x'z = (xy + x')(xy + z) = (x + x')(y + x')(x + z)(y + z) \\
&= (x' + y)(x + z)(y + z) = (x' + y + zz')(x + z + yy')(y + z + xx') \\
&= (x'+y+z)(x'+y+z')(x+y+z)(x+y'+z)(x+y+z)(x'+y+z) \\
&= (x + y + z)(x + y' + z)(x' + y + z)(x' + y + z') = \\
&= M_0 M_2 M_4 M_5 = \Pi(0, 2, 4, 5)
\end{aligned}
$$

Μετατροπή μεταξύ Κανονικών Μορφών

Βήματα μετατροπής από άθροισμα ελαχιστόρων σε γινόμενο μεγιστόρων:

1. Εκφράζω την F σε άθροισμα ελαχιστόρων. Έστω F(A,B,C)=Σ(1,4,5,6,7).
2. Βρίσκω την $F'=\Sigma(0,2,3)=m_0+m_2+m_3$.
3. Βρίσκω την F'' ως εξής:

$$F''=(m_0+m_2+m_3)'= m_0'm_2'm_3'= M_0M_2M_3 = \Pi(0,2,3)$$

x	*y*	*z*	*F*
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

F(x,y,z)=Σ(1,3,6,7)

F(x,y,z)=Π(0,2,4,5)

Για να μετατρέψουμε τη μία κανονική μορφή στην άλλη, εναλλάσσουμε τα σύμβολα Σ και Π και χρησιμοποιούμε εκείνους τους δείκτες που λείπουν από την αρχική μορφή.

Πρότυπες Μορφές

Πρότυπες μορφές: Οι συναρτήσεις όπου οι όροι μπορούν να περιέχουν λιγότερους από *n* παράγοντες.

Άθροισμα γινομένων: μια έκφραση Boole που περιέχει όρους AND που ονομάζονται γινόμενα με έναν ή περισσότερους παράγοντες ο κάθε ένας. «Άθροισμα» λέμε το λογικό OR όλων αυτών των γινομένων.

Παράδειγμα:

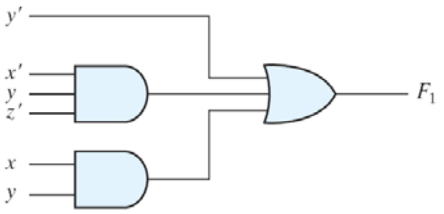
$$F_1 = y' + xy + x'yz'$$

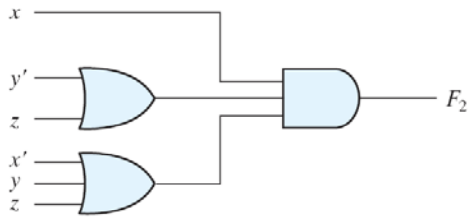
Γινόμενο Αθροισμάτων: μια έκφραση Boole που περιέχει όρους OR που ονομάζονται αθροίσματα. Κάθε άθροισμα περιέχει έναν ή περισσότερους παράγοντες. Το γινόμενο αποτελεί το λογικό AND των αθροισμάτων.

Παράδειγμα:

$$F_2 = x(y' + z)(x' + y + z')$$

Υλοποίηση Δύο Επιπέδων



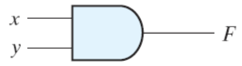
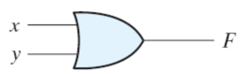
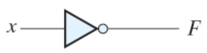
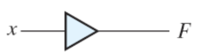


$F_1 = y' + xy + x'yz'$

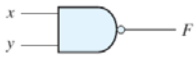
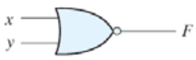
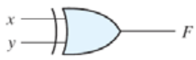
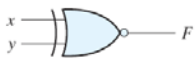
$F_2 = x(y' + z)(x' + y + z)$

Κάθε άθροισμα γινομένων και κάθε γινόμενο αθροισμάτων μπορεί να υλοποιηθεί σε δύο επίπεδα πυλών.

Ψηφιακές Λογικές Πύλες

AND **ΚΑΙ**		$F = xy$	x y | F 0 0 | 0 0 1 | 0 1 0 | 0 1 1 | 1
OR **Η**		$F = x + y$	x y | F 0 0 | 0 0 1 | 1 1 0 | 1 1 1 | 1
Inverter **Αντιστροφέας**		$F = x'$	x | F 0 | 1 1 | 0
Buffer **Απομονωτής**		$F = x$	x | F 0 | 0 1 | 1

Ψηφιακές Λογικές Πύλες

			x	y	F
NAND **ΟΧΙ-ΚΑΙ**		$F = (xy)'$	0 0 1 1	0 1 0 1	1 1 1 0
NOR **ΟΥΤΕ**		$F = (x + y)'$	0 0 1 1	0 1 0 1	1 0 0 0
Exclusive-OR (XOR) **Αποκλειστικό-Η**		$F = xy' + x'y$ $= x \oplus y$	0 0 1 1	0 1 0 1	0 1 1 0
Exclusive-NOR or equivalence **Αποκλειστικό-ΟΥΤΕ**		$F = xy + x'y'$ $= (x \oplus y)'$	0 0 1 1	0 1 0 1	1 0 0 1

Επέκταση σε περισσότερες Εισόδους

Οι πύλες εκτός από τους αντιστροφείς και τους απομονωτές μπορούν να επεκταθούν σε περισσότερες από δύο εισόδους. Βασική προϋπόθεση η λογική πράξη να είναι αντιμεταθετική και προσεταιριστική.

Οι πράξεις AND και OR είναι αντιμεταθετικές και προσεταιριστικές, αφού

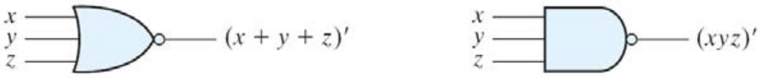
$$x + y = y + x$$

$$(x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z$$

επομένως οι πύλες AND και OR μπορούν να επεκταθούν σε περισσότερες από δύο εισόδους.

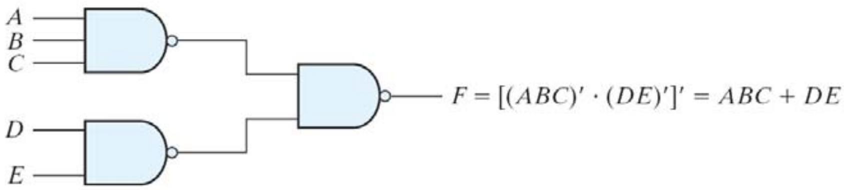
Επέκταση σε περισσότερες Εισόδους

Οι πράξεις NAND και NOR είναι αντιμεταθετικές αλλά όχι προσεταιριστικές.
Για αυτό τις ορίζω ως: $x\downarrow y\downarrow z=(x+y+z)'$, $x\uparrow y\uparrow z=(xyz)'$



Πύλη NOR 3 εισόδων

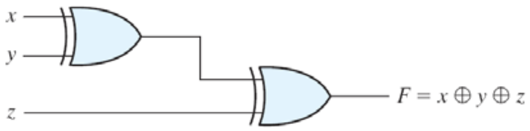
Πύλη NAND 3 εισόδων



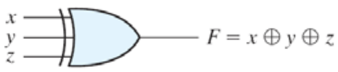
Κύκλωμα με NAND πύλες

Επέκταση σε περισσότερες Εισόδους

Οι πράξεις XOR και XNOR είναι αντιμεταθετικές και προσεταιριστικές.



Συνάρτηση XOR 3 μεταβλητών με πύλες XOR 2 εισόδων



Πύλη XOR 3 εισόδων

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Πίνακας αλήθειας

Η συνάρτηση XOR είναι περιττή συνάρτηση, δηλαδή ισούται με 1 εάν οι μεταβλητές εισόδου έχουν περιττό αριθμό άσσων.

Η συνάρτηση XNOR είναι άρτια συνάρτηση, δηλαδή ισούται με 1 εάν οι μεταβλητές εισόδου έχουν άρτιο αριθμό άσσων.

Ολοκληρωμένα Κυκλώματα

ICs
- Συλλογή από πύλες διασυνδεδεμένες στο κύκλωμα
- Κεραμικό ή πλαστικό περίβλημα
- Ακροδέκτες (pins)

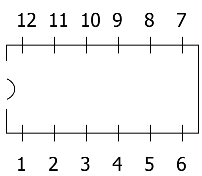
Επίπεδα Ολοκλήρωσης

Μικρής Κλίμακας	**SSI**:	10 πύλες / chip
Μεσαίας Κλίμακας	**MSI**:	10-100 πύλες / chip
Μεγάλης Κλίμακας	**LSI**:	100 - μερικές χιλιάδες πύλες / chip
Πολύ Μεγάλης Κλίμακας	**VLSI**:	<1.000.000 πύλες / chip
Πάρα Πολύ Μεγάλης Κλίμακας	**ULSI**:	>1.000.000 πύλες / chip

Ολοκληρωμένα Κυκλώματα

Οικογένειες ICs
- TTL Transistor-Transistor Logic: Πρότυπη Λογική Οικογένεια.
- ECL Emitter-Coupled Logic: Υψηλή Ταχύτητα Λειτουργίας.
- MOS Metal Oxide Semiconductor: Υψηλή Πυκνότητα.
- CMOS Complementary MOS: Χαμηλή Κατανάλωση.

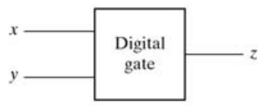
Χαρακτηριστικά
- Ικανότητα Οδήγησης
- Κατανάλωση Ισχύος
- Καθυστέρηση Διάδοσης
- Περιθώριο Θορύβου



Θετική και Αρνητική Λογική

x	y	F
L	L	L
L	H	L
H	L	L
H	H	H

Πίνακας αλήθειας με H και L

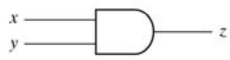


Σχηματικό διάγραμμα πύλης

Θετική Λογική

x	y	z
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Πίνακας αλήθειας με θετική λογική

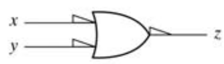


Πύλη AND θετικής λογικής

Αρνητική Λογική

x	y	z
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Πίνακας αλήθειας με αρνητική λογική



Πύλη OR αρνητικής λογικής

Βιβλιογραφία

1. Ψηφιακή Σχεδίαση ($3^{η}$ έκδοση), M. Morris Mano, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, 2005
2. Ψηφιακή Σχεδίαση Αρχές και Πρακτικές, J. Wakerly, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, 2002
3. Digital Design (4^{th} edition), M. Morris Mano & M. Ciletti, Pearson Prentice Hall, 2007