



Πανεπιστήμιο Πατρών
Τμήμα Φυσικής
Εργαστήριο Ηλεκτρονικής

Ψηφιακά Ηλεκτρονικά
Αριθμητικά Συστήματα

Επιμέλεια Διαφανειών: Δ. Μπακάλης

Πάτρα, Φεβρουάριος 2009

Αριθμητικά Συστήματα

Δεκαδικό Σύστημα: Βάση το 10, ψηφία 10 και συντελεστές \times δυνάμεις του 10

$$7392.25 = 7 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 2 \times 10^0 + 2 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}$$

$$a_3 a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \text{ όπου } 0 \leq a_i \leq 9, \dots + a_i \times 10^i + \dots$$

Δυαδικό Σύστημα: Βάση το 2, ψηφία 2 και συντελεστές \times δυνάμεις του 2

$$11010.01 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} = 26.25$$

$$a_4 a_3 a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \text{ όπου } 0 \leq a_i \leq 1, \dots + a_i \times 2^i + \dots$$

r-αδικό Σύστημα: Βάση το r, ψηφία r και συντελεστές \times δυνάμεις του r

$$a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m} = a_n r^n + \dots + a_1 r^1 + a_0 r^0 + a_{-1} r^{-1} + a_{-2} r^{-2} + \dots + a_{-m} r^{-m}$$

$$\text{όπου } 0 \leq a_i \leq r-1, \dots + a_i r^i + \dots$$

Παραδείγματα

Σύστημα αρίθμησης με βάση $r=5$

$$4021.2_5 = 4 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 2 \times 5^1 + 1 \times 5^0 + 2 \times 5^{-1} = 511.4_{10}$$

Οκταδικό αριθμητικό σύστημα ($r=8$)

$$127.4_8 = 1 \times 8^2 + 2 \times 8^1 + 7 \times 8^0 + 4 \times 8^{-1} = 87.5_{10}$$

Δεκαεξαδικό αριθμητικό σύστημα ($r=16$)

$$B65F_{16} = 11 \times 16^3 + 6 \times 16^2 + 5 \times 16^1 + 15 \times 16^0 = 46687_{10}$$

Δυαδικό αριθμητικό σύστημα ($r=2$)

$$10101_2 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 16 + 4 + 1 = 21_{10}$$

Παραδείγματα

Decimal (base 10)	Binary (base 2)	Octal (base 8)	Hexadecimal (base 16)
00	0000	00	0
01	0001	01	1
02	0010	02	2
03	0011	03	3
04	0100	04	4
05	0101	05	5
06	0110	06	6
07	0111	07	7
08	1000	10	8
09	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

Αριθμητικές Πράξεις

Δεκαδικό Σύστημα

$$\begin{array}{r} 45 \\ + 39 \\ \hline 84 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 45 \\ - 39 \\ \hline 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 11 \\ \hline 15 \\ 15 \\ \hline 165 \end{array}$$

Δυαδικό Σύστημα

$$\begin{array}{r} 101101 \\ + 100111 \\ \hline 1010100 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 101101 \\ - 100111 \\ \hline 000110 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1011 \\ \times 101 \\ \hline 1011 \\ 0000 \\ 1011 \\ \hline 110111 \end{array}$$

Οι αριθμητικές πράξεις σε ένα οποιοδήποτε αριθμητικό σύστημα γίνονται με τον ίδιο τρόπο με τον οποίο γίνονται και στο δεκαδικό σύστημα.

Μετατροπή Αριθμού από Βάση r σε Βάση 10

r-αδικό αριθμητικό σύστημα:

Πολ/ζουμε κάθε συντελεστή με την αντίστοιχη δύναμη του r και κάνουμε πρόσθεση

$$(630.4)_8 = 6 \times 8^2 + 3 \times 8^1 + 0 \times 8^0 + 4 \times 8^{-1} = 384 + 24 + 0.5 = (408.5)_{10}$$

Δυαδικό σύστημα:

Βρίσκουμε το άθροισμα των δυνάμεων του 2 εκείνων των συντελεστών που έχουν τιμή 1.

$$(1010.011)_2 = 2^3 + 2^1 + 2^{-2} + 2^{-3} = 8 + 2 + 0.25 + 0.125 = (10.375)_{10}$$

Μετατροπή Αριθμού από Βάση 10 σε Βάση r

Ακέραιο Μέρος

$$\begin{aligned} X &= a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r^1 + a_0 \\ X \bmod r &= a_0 \\ (X / r)_{\text{αποκοπή}} &= a_n r^{n-1} + \dots + a_2 r^1 + a_1 \end{aligned}$$

Διαδοχικές Διαιρέσεις με r

Οι συντελεστές είναι τα υπόλοιπα

Παράδειγμα: Μετατροπή του 41 στο δυαδικό σύστημα

$$\begin{aligned} 41 : 2 &= 20 + 1 / 2 \\ 20 : 2 &= 10 + 0 / 2 \\ 10 : 2 &= 5 + 0 / 2 \\ 5 : 2 &= 2 + 1 / 2 \\ 2 : 2 &= 1 + 0 / 2 \\ 1 : 2 &= 0 + 1 / 2 \end{aligned} \quad \rightarrow (41)_{10} = (101001)_2$$

Μετατροπή Αριθμού από Βάση 10 σε Βάση r

Κλασματικό Μέρος

$$\begin{aligned} X &= a_{-1} r^{-1} + a_{-2} r^{-2} + \dots + a_m r^{-m} \\ X * r &= a_{-1} + a_{-2} r^{-1} + \dots + a_m r^{-(m-1)} \\ (X * r)_{\text{ακέραιο μέρος}} &= a_{-1} \\ (X * r)_{\text{χωρίς ακέραιο μέρος}} &= a_{-2} r^{-1} + \dots + a_m r^{-(m-1)} \end{aligned}$$

Διαδοχικοί Πολλαπλασιασμοί με r

Οι συντελεστές είναι τα ακέραια μέρη

Παράδειγμα: Μετατροπή του .6875 στο δυαδικό σύστημα

$$\begin{aligned} .6875 \times 2 &= 1 .3750 \\ .3750 \times 2 &= 0 .7500 \\ .7500 \times 2 &= 1 .5000 \\ .5000 \times 2 &= 1 .0000 \end{aligned} \quad \rightarrow (.6875)_{10} = (.1011)_2$$

Μετατροπή Αριθμού από Βάση 8/16 σε Βάση 2

Κάθε οκταδικό/δεκαεξαδικό ψηφίο αντιστοιχεί σε 3/4 δυαδικά ψηφία:

Εύκολη Μετατροπή & Συμπίεση Δεδομένων.

Παράδειγμα 1: από 8-αδικό σε δυαδικό και αντίστροφα

010 110 001 101 011 . 111 100 000 110
2 6 1 5 3 . 7 4 0 6

Binary (base 2)	Octal (base 8)	Hexadecimal (base 16)
0000	00	0
0001	01	1
0010	02	2
0011	03	3
0100	04	4
0101	05	5
0110	06	6
0111	07	7
1000	10	8
1001	11	9
1010	12	A
1011	13	B
1100	14	C
1101	15	D
1110	16	E
1111	17	F

Παράδειγμα 2: από 16-αδικό σε δυαδικό και αντίστροφα

0010 1100 0110 1011 . 1111 0000 0110
2 C 6 B . F 0 6

Μετατροπή Βάσης Αριθμού: Ανακεφαλαίωση

- 1) Μετατροπή από r-αδικό σε δεκαδικό:
Πολ/ζουμε τους συντελεστές με τις αντίστοιχες δυνάμεις της βάσης r και προσθέτουμε.
- 2) Μετατροπή από δεκαδικό σε r-αδικό:
Χωρίζουμε ακέραιο και κλασματικό μέρος.
Ακέραιο μέρος: διαιρούμε συνέχεια με r και κρατάμε το υπόλοιπο.
Κλασματικό μέρος: πολ/ζουμε συνέχεια με r και κρατάμε το ακέραιο μέρος.
- 3) Μετατροπή από 8-αδικό/16-αδικό σε δυαδικό:
Αντικαθιστούμε κάθε ψηφίο με τον αντίστοιχο 3-ψηφίο/4-ψηφίο δυαδικό αριθμό.
- 4) Μετατροπή από δυαδικό σε 8-αδικό/16-αδικό:
Ομαδοποιούμε τα δυαδικά ψηφία σε τριάδες/τετράδες και αντικαθιστούμε κάθε μία με το αντίστοιχο ψηφίο του 8-/16-αδικού.

Συμπληρώματα

Τα συμπληρώματα απλοποιούν την πράξη της αφαίρεσης.

Σε κάθε αριθμητικό σύστημα ορίζονται δύο τύποι συμπληρώματος:

- α) Συμπλήρωμα ως προς βάση r
- β) Συμπλήρωμα ως προς ελαττωμένη βάση $r - 1$

Συμπλήρωμα ως προς Ελαττωμένη Βάση $r-1$

$$A' = (r^n - 1) - A$$

Δεκαδικό σύστημα: (για 4 ψηφία) $A' = (10^4 - 1) - A = 9999 - A$

=> αφαίρεση κάθε ψηφίου του A από το 9 (δεν υπάρχουν κρατούμενα)

$$3442' = 9999 - 3442 = 6557$$

Δυαδικό σύστημα: $A' = (2^n - 1) - A = 11...1 - A$

=> αφαίρεση κάθε ψηφίου του A από το 1 => αντιστροφή κάθε ψηφίου

$$1011010011' = 0100101100$$

Συμπλήρωμα ως προς Βάση r

$$A_{\sigma r} = r^n - A \text{ για } A \neq 0 \text{ και } A_{\sigma r} = 0 \text{ για } A = 0$$

$$A_{\sigma r} = r^n - A - 1 + 1 = [(r^n - 1) - A] + 1 = A' + 1$$

=> Εύρεση του συμπληρώματος ως προς r-1 και πρόσθεση του 1

Παράδειγμα (δυναδικό σύστημα):

$$1011010011_{\sigma 2} = 0100101100 + 1 = 0100101101$$



Συμπληρώματα: Ανακεφαλαίωση

Συμπλήρωμα ως προς ελαττωμένη βάση r – 1:

Αφαιρούμε κάθε ψηφίο από το r – 1.

Συμπλήρωμα ως προς βάση r:

1) Βρίσκουμε το συμπλήρωμα ως προς r – 1 και προσθέτουμε 1.

ή

2) Αφαιρούμε το πρώτο μη-μηδενικό λιγότερο σημαντικό ψηφίο από το r και όλα τα υπόλοιπα περισσότερο σημαντικά ψηφία από το r – 1.



Προσημασμένοι Δυαδικοί Αριθμοί

Το πρόσημο δηλώνεται με την τοποθέτηση ενός bit στην αριστερότερη θέση (0=+, 1=-)

Τρόποι Αναπαράστασης { **Προσημασμένο Μέτρο:** Το αριστερότερο bit είναι το πρόσημο και το υπόλοιπο είναι το μέτρο (απόλυτη τιμή)
Προσημασμένο Συμπλήρωμα ως προς 2: Οι θετικοί αριθμοί όπως και στο Προσημασμένο Μέτρο. Οι αρνητικοί αριθμοί σε συμπλήρωμα ως προς 2.

Απεικόνιση με 5 ψηφία του +9 { **Προσημασμένο Μέτρο:** 01001
Προσημασμένο Συμπλήρωμα ως προς 2: 01001

Απεικόνιση με 5 ψηφία του -9 { **Προσημασμένο Μέτρο:** 11001
Προσημασμένο Συμπλήρωμα ως προς 2: 10111

Παράδειγμα: Προσημασμένοι Αριθμοί 4-bit

Decimal	Signed-2's Complement	Signed-1's Complement	Signed Magnitude
+7	0111	0111	0111
+6	0110	0110	0110
+5	0101	0101	0101
+4	0100	0100	0100
+3	0011	0011	0011
+2	0010	0010	0010
+1	0001	0001	0001
+0	0000	0000	0000
-0	—	1111	1000
-1	1111	1110	1001
-2	1110	1101	1010
-3	1101	1100	1011
-4	1100	1011	1100
-5	1011	1010	1101
-6	1010	1001	1110
-7	1001	1000	1111
-8	1000	—	—

Η Πράξη της Πρόσθεσης

Πρόσθεση σε Προσημασμένο Μέτρο (απαιτεί σύγκριση προσήμων)

1. Αν τα πρόσημα είναι ίδια προσθέτουμε τα μέτρα με τελικό πρόσημο το κοινό.
2. Αν τα πρόσημα είναι διαφορετικά αφαιρούμε από τον μεγαλύτερο τον μικρότερο με τελικό πρόσημο αυτό του μεγαλύτερου.

Πρόσθεση σε Προσημασμένο Συμπλήρωμα ως προς 2

Απλή πρόσθεση και το τελικό κρατούμενο αγνοείται. Αν το αποτέλεσμα είναι αρνητικό θα είναι σε συμπλήρωμα ως προς 2. Καμία μετατροπή ή σύγκριση δεν απαιτείται.

Παραδείγματα:

$$\begin{array}{r} 11010 \quad (-6) \\ + 01101 \quad (+13) \\ \hline 100111 \quad (+7) \end{array} \qquad \begin{array}{r} 00110 \quad (+6) \\ + 10011 \quad (-13) \\ \hline 011001 \quad (-7) \end{array}$$

Η Πράξη της Αφαίρεσης

$$(\pm A) - (+B) = (\pm A) + (-B)$$

$$(\pm A) - (-B) = (\pm A) + (+B)$$

Αφαίρεση σε Προσημασμένο Συμπλήρωμα ως προς 2

Προσθέτουμε στο μειωτέο το συμπλήρωμα ως προς 2 του αφαιρετέου.
Τυχόν κρατούμενο αγνοείται.

Παράδειγμα:

$$\begin{array}{r} 11010 \quad (-6) \\ - 10011 \quad -(-13) \\ \hline 11010 \quad (-6) \\ + 01101 \quad (+13) \\ \hline 000111 \quad (+7) \end{array}$$

Κωδικοποίηση Δεκαδικών Ψηφίων

Χρησιμοποιείται για την αναπαράσταση πληροφοριών με χρήση δυαδικών ψηφίων (bits).

Decimal Digit	BCD 8421	2421	Excess-3	8, 4, -2, -1
0	0000	0000	0011	0000
1	0001	0001	0100	0111
2	0010	0010	0101	0110
3	0011	0011	0110	0101
4	0100	0100	0111	0100
5	0101	1011	1000	1011
6	0110	1100	1001	1010
7	0111	1101	1010	1001
8	1000	1110	1011	1000
9	1001	1111	1100	1111
Unused bit combinations	1010 1011 1100 1101 1110 1111	0101 0110 0111 1000 1001 1010	0000 0001 0010 1101 1110 1111	0001 0010 0011 1100 1101 1110

Μετατροπή ενός αριθμού στο δυαδικό σύστημα ≠ δυαδική κωδικοποίηση

395 { Δυαδικός : 110001011 (9 bits) | Δυαδική Κωδικοποίηση BCD : 0011 1001 0101 (12 bits) | Οι κώδικες excess-3, ο 2 4 2 1, ο 8 4 -2 -1 είναι αυτό-συμπληρωματικοί: το συμπλ. ως προς 9 βγαίνει με αντικατάσταση των 0 - 1.

Αλφαριθμητικοί Κώδικες

Κώδικας ASCII

Περιλαμβάνει:

τα 10 δεκαδικά ψηφία,

τα 26 γράμματα του αλφαβήτου (x2),

32 ειδικούς χαρακτήρες (&, *, +),

34 χαρακτήρες ελέγχου

American Standard Code for Information Interchange (ASCII)

$b_4b_3b_2b_1$	$b_7b_6b_5$							
	000	001	010	011	100	101	110	111
0000	NUL	DLE	SP	0	@	P	`	p
0001	SOH	DC1	!	1	A	Q	a	q
0010	STX	DC2	"	2	B	R	b	r
0011	ETX	DC3	#	3	C	S	c	s
0100	EOT	DC4	\$	4	D	T	d	t
0101	ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u
0110	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
0111	BEL	ETB	'	7	G	W	g	w
1000	BS	CAN	(8	H	X	h	x
1001	HT	EM)	9	I	Y	i	y
1010	LF	SUB	*	:	J	Z	j	z
1011	VT	ESC	+	:	K	[k	{
1100	FF	FS	,	^	L	\	l	
1101	CR	GS	-	=	M]	m	}
1110	SO	RS	.	>	N	^	n	~
1111	SI	US	/	?	O	-	o	DEL

Χαρακτήρες Ελέγχου { Διαμορφωτές Μορφής Κειμένου (backspace, tab)
Διαχωριστές Πληροφορίας (Διαχωριστής Αρχείων)
Ελέγχου Επικοινωνίας (STX, ETX)

Κώδικας Gray (Ανακλαστικός Κώδικας)

Οι διαδοχικοί αριθμοί στον κώδικα Gray μεταβάλλονται κατά ένα μόνο bit.

Χρησιμοποιείται σε ψηφιακά συστήματα όπου απαιτείται χαμηλή κατανάλωση ή υψηλή αξιοπιστία.

Gray Code	Decimal Equivalent
0000	0
0001	1
0011	2
0010	3
0110	4
0111	5
0101	6
0100	7
1100	8
1101	9
1111	10
1110	11
1010	12
1011	13
1001	14
1000	15

Κώδικες Ανίχνευσης Σφαλμάτων

Τα φυσικά μέσα μετάδοσης επηρεάζονται από **θόρυβο** που προκαλεί λάθη. Για αυτό χρησιμοποιούνται οι **κώδικες ανίχνευσης σφαλμάτων** (π.χ. δυαδικά ψηφία **ισοτιμίας**).

Η μέθοδος **ισοτιμίας** ανιχνεύει περιττό αριθμό λαθών.

Bit ισοτιμίας

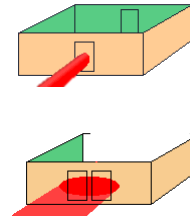
Περιττή Ισοτιμία		Άρτια ισοτιμία	
Μήνυμα	P	Μήνυμα	P
0000	1	0000	0
0001	0	0001	1
0010	0	0010	1
0011	1	0011	0
0100	0	0100	1
0101	1	0101	0
0110	1	0110	0
0111	0	0111	1
1000	0	1000	1
1001	1	1001	0
1010	1	1010	0
1011	0	1011	1
1100	1	1100	0
1101	0	1101	1
1110	0	1110	1
1111	1	1111	0

Διαδική Λογική

Ασχολείται με μεταβλητές που μπορούν να έχουν δύο μόνο διακριτές τιμές και με λογικές πράξεις.

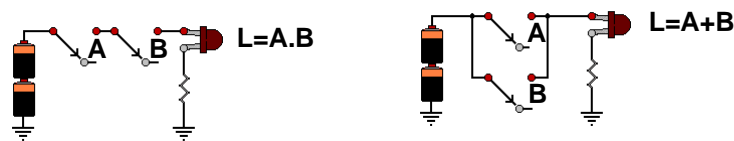
Λογικές Πράξεις: $\left\{ \begin{array}{l} \text{AND: } X \cdot Y = 1 \text{ όταν } X=Y=1 \\ \text{OR: } X + Y = 1 \text{ όταν } X=1 \text{ ή } Y=1 \\ \text{NOT: } X' = 1 \text{ όταν } X=0 \end{array} \right.$

AND			OR			NOT	
x	y	$x \cdot y$	x	y	$x + y$	x	x'
0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1		
1	1	1	1	1	1		



Το αριθμητικό $X+Y$ είναι διαφορετικό από το λογικό $X+Y$:
 $1+1=10$ (αριθμ), $1+1=1$ (λογικό)

Κυκλώματα Διακοπών και Διαδικά Σήματα



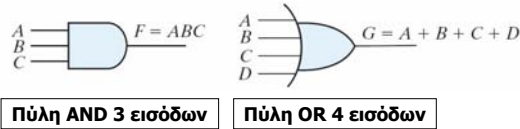
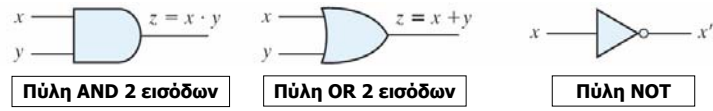
AND			OR		
x	y	$x \cdot y$	x	y	$x + y$
0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Οι διακόπτες παριστάνουν δυο δυαδικές μεταβλητές A και B.

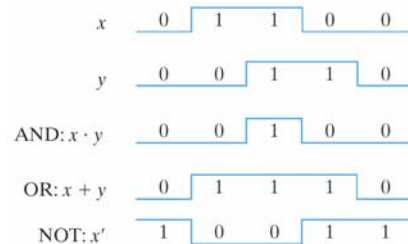
Ο λαμπτήρας L παριστάνει μία τρίτη δυαδική μεταβλητή.

Τα δύο κυκλώματα εκφράζονται σε δυαδική λογική με τις πράξεις AND και OR.

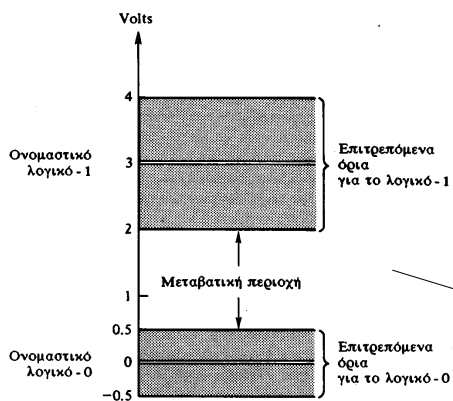
Λογικές Πύλες



Διαγράμματα Λογικής συμπεριφοράς σημάτων στον άξονα του χρόνου.



Κυκλώματα Διακοπών και Δυαδικά Σήματα



Τα κυκλώματα ανάλογα με τον τρόπο κατασκευής τους και τις συνθήκες λειτουργίας τους επηρεάζονται από θόρυβο καθώς η λειτουργία τους δεν είναι απόλυτα σταθερή.

Πραγματική εικόνα λογικών τάσεων και αντιμετώπισης από τα λογικά κυκλώματα.

Βιβλιογραφία

1. Ψηφιακή Σχεδίαση (3^η έκδοση), M. Morris Mano, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, 2005
2. Ψηφιακή Σχεδίαση Αρχές και Πρακτικές, J. Wakerly, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, 2002
3. Digital Design (4th edition), M. Morris Mano & M. Ciletti, Pearson Prentice Hall, 2007

