# ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ Ι

*Τυπολόγιο & Μεθοδολογία*

## 1. ΦΟΡΤΙΑ ΚΑΙ ΡΕΥΜΑΤΑ

• Έστω φορτίο Q το οποίο δεν είναι σημειακό, αλλά κατανέμεται πάνω σε κάποια γεωμετρική οντότητα (γραμμή, επιφάνεια ή όγκο). Στις τρεις αυτές περιπτώσεις ορίζουμε αντίστοιχα τη γραμμική λ, επιφανειακή σ και χωρική πυκνότητα ρ φορτίου ως εξής :

$$\lambda \equiv \lim_{\Delta\ell\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta\ell} \equiv \frac{dQ}{d\ell}\ , \quad \sigma \equiv \lim_{\Delta^2 S\to 0}\frac{\Delta^2 Q}{\Delta^2 S} \equiv \frac{d^2Q}{d^2S}$$

$$\rho \equiv \lim_{\Delta^3\upsilon\to 0}\frac{\Delta^3 Q}{\Delta^3\upsilon} \equiv \frac{d^3Q}{d^3\upsilon}$$

• Από τις παραπάνω μπορούμε αντίστροφα να υπολογίσουμε το συνολικό φορτίο από τις πυκνότητες με ολοκλήρωση, δηλαδή :

$$Q = \int_L \lambda(\vec r)d\ell\ , \qquad Q = \iint_S \sigma(\vec r)d^2S$$

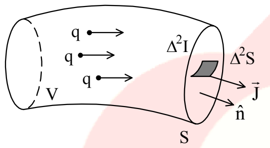
$$Q = \iiint_V \rho(\vec r)d^3\upsilon$$

• Ο συμβατικός ορισμός του ρεύματος αφορά αγωγούς με διατομή μηδενικού εμβαδού. Συγκεκριμένα, αν από δεδομένο σημείο $\vec r$ του αγωγού διέρχεται φορτίο ΔQ σε χρόνο Δt, τότε ορίζουμε σαν ηλεκτρικό ρεύμα στο σημείο $\vec r$ το μέγεθος :

$$I(\vec r, t) \equiv \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t} \equiv \frac{dQ}{dt}$$

• Έστω ότι από τη στοιχειώδη επιφάνεια $\Delta^2 S$ διέρχεται ρεύμα $\Delta^2 I$. Ορίζουμε σαν χωρική πυκνότητα ρεύματος $\vec J$ το μέγεθος:

$$\vec J(\vec r) \equiv \lim_{\Delta^2 S\to 0}\frac{\Delta^2 I}{\Delta^2 S}\hat n \equiv \frac{d^2 I}{d^2 S}\hat n$$



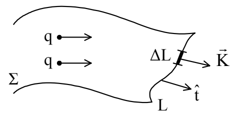

• Έστω ότι από το στοιχειώδες μήκος ΔL κατά μήκος της L διέρχεται ρεύμα ΔΙ. Ορίζουμε σαν επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος $\vec K$ στο σημείο $\vec r$ της L το μέγεθος:

$$\vec K(\vec r) \equiv \lim_{\Delta L\to 0}\frac{\Delta I}{\Delta L}\hat t \equiv \frac{dI}{dL}\hat t$$

• Αντιστρόφως, από τις παραπάνω μπορούμε να υπολογίσουμε το συνολικό ρεύμα που διέρχεται από μια επιφάνεια ή μια καμπύλη ολοκληρώνοντας αντίστοιχα, δηλαδή :

$$I = \iint_S \vec J\cdot d^2\vec S \quad (\text{επιφάνεια})$$

$$I = \int_L \vec K\cdot\hat t d\ell \quad (\text{καμπύλη})$$




## 2. ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Η δύναμη $\vec F$ μεταξύ δυο σημειακών φορτίων $q_1,q_2$ που απέχουν απόσταση r είναι :

$$\vec F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat r$$

όπου $\hat r$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος της ευθείας που ενώνει τα $q_1,q_2$.

• Έστω ότι φορτίο q υπόκειται σε δύναμη $\vec F$ η οποία οφείλεται σε ένα ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από ένα εξωτερικό φορτίο Q. Ονομάζουμε **ένταση του ηλεκτρικού πεδίου** το διάνυσμα:

$$\vec E \equiv \frac{\vec F}{q}$$

Η $\vec E$ είναι πάντα ανεξάρτητη του φορτίου q, αλλά είναι συνάρτηση της θέσης του, και καθορίζει το πόσο ισχυρό είναι το ηλεκτρικό πεδίο που οφείλεται στο Q σε κάθε σημείο του χώρου $\vec r$ . Η ένταση ηλεκτρικού πεδίου που οφείλεται σε γραμμική, επιφανειακή και χωρική πυκνότητα φορτίου είναι αντίστοιχα:

$$\vec E_L(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_L \lambda(\vec r')\frac{\vec r-\vec r'}{\left|\vec r-\vec r'\right|^3}d\ell'$$

$$\vec E_S(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iint_S \sigma(\vec r')\frac{\vec r-\vec r'}{\left|\vec r-\vec r'\right|^3}d^2S'$$

$$\vec E_V(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V \rho(\vec r')\frac{\vec r-\vec r'}{\left|\vec r-\vec r'\right|^3}d^3\upsilon'$$

όπου, φυσικά, $\vec r-\vec r' \equiv \vec R$ (οπότε $R \equiv \left|\vec r-\vec r'\right|$ και $\hat R = \dfrac{\vec R}{R} = \dfrac{\vec r-\vec r'}{\left|\vec r-\vec r'\right|}$ )

• Μπορεί να δειχθεί ότι για οποιοδήποτε ηλεκτροστατικό πεδίο ισχύει: $\nabla\times\vec E = \vec 0$ δηλαδή οποιοδήποτε ηλεκτροστατικό πεδίο είναι αστρόβιλο. Συνεπάγεται ότι πάντα υπάρχει **συνάρτηση δυναμικού** Φ, τέτοια ώστε : $\vec E = -\nabla\Phi(\vec r)$

Η έκφραση για την Φ είναι:

**Σημειακό φορτίο *Q*:**

$$\Phi(\vec r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\left|\vec r-\vec r'\right|}$$

**Γραμμική πυκνότητα φορτίου *λ*:**

$$\Phi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_L \lambda(\vec r')\frac{1}{\left|\vec r-\vec r'\right|}d\ell'$$

**Επιφανειακή πυκνότητα φορτίου *σ*:**

$$\Phi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iint_S \sigma(\vec r')\frac{1}{\left|\vec r-\vec r'\right|}d^2S'$$

**Χωρική πυκνότητα φορτίου *ρ*:**

$$\Phi(\vec r) \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V \rho(\vec r')\frac{1}{\left|\vec r-\vec r'\right|}d^3\upsilon'$$

**Νόμος Gauss**

Έστω S μια τυχαία κλειστή επιφάνεια η οποία περικλείει φορτίο q. Ισχύει τότε ο νόμος του Gauss σε ολοκληρωτική μορφή :

$$\oiint_S \vec E\cdot d^2\vec s = q/\varepsilon_o$$

Δηλαδή η ροή του $\vec E$ από την κλειστή αυτή επιφάνεια ισούται πάντα με $q/\varepsilon_o$, όπου q ισούται με το άθροισμα των ελεύθερων φορτίων και των φορτίων πόλωσης. Ο νόμος του Gauss για την ηλεκτρική μετατόπιση $\vec D$ είναι :

$$\oiint_S \vec D\cdot d^2\vec s = q_{free}$$

όπου $q_{free}$ είναι το ολικό ελεύθερο φορτίο (δεν περικλείει τα φορτία πόλωσης).

Ορίζουμε το διάνυσμα της ηλεκτρικής μετατόπισης ως :

$$\vec D = \varepsilon_0\vec E + \vec P \qquad \textbf{(1)}$$

όπου η πόλωση $\vec P$ ορίζεται ως διπολική ροπή ανά μονάδα όγκου.

Ένα υλικό ονομάζεται γραμμικό αν ισχύει :

$$\vec P = \varepsilon_o\chi_e\vec E \qquad \textbf{(2)}$$

όπου $\chi_e$ η ηλεκτρική επιδεκτικότητα του υλικού.

Για γραμμικά υλικά θα ισχύει τότε :

$$\vec D = \varepsilon_o\vec E + \varepsilon_o\chi_e\vec E = \varepsilon_o(1+\chi_e)\vec E =$$

$$= \varepsilon_o\varepsilon_r\vec E = \varepsilon\vec E \qquad \textbf{(3)}$$

όπου ε η ηλεκτρική διαπερατότητα του υλικού και $\varepsilon_r=\varepsilon/\varepsilon_o$ η σχετική διηλεκτρική σταθερά.

**Παρατήρηση :** Αν ένα υλικό εμφανίζει μόνιμη πόλωση (ηλεκτρίτης) τότε δεν είναι γραμμικό δηλαδή δεν ισχύουν οι σχέσεις **(2)** και **(3)**.

Ο νόμος του Gauss για το $\vec E$ σε διαφορική μορφή είναι : $\nabla\cdot\vec E = \rho/\varepsilon_o$

Όμως $\vec E = -\nabla\Phi$ . Άρα συνδυάζοντας αυτές τις δυο σχέσεις παίρνουμε :

$$\vec\nabla\cdot(-\nabla\Phi) = \rho/\varepsilon_o \Rightarrow \boxed{\nabla^2\Phi = -\rho/\varepsilon_o}$$

Αυτή ονομάζεται εξίσωση Poisson.

Σε μια περιοχή του χώρου όπου δεν υπάρχει χωρική πυκνότητα φορτίου (ρ=0) παίρνουμε την εξίσωση Laplace:

$$\boxed{\nabla^2\Phi = 0}$$

Η εξίσωση Laplace στα διάφορα συστήματα συντεταγμένων γράφεται :

Καρτεσιανές (x,y,z) :

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$$

Σφαιρικές (r,θ,φ) :

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) +$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = 0$$

Κυλινδρικές (r,φ,z) :

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$$

## 3. ΜΑΓΝΗΤΟΣΤΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

● Έστω ότι κάποιο ηλεκτρικό ρεύμα δημιουργεί ένα μαγνητικό πεδίο, δηλαδή έναν χώρο στον οποίο υφίστανται μαγνητικές δυνάμεις. Το πόσο ισχυρές είναι αυτές οι δυνάμεις καθορίζεται από το διάνυσμα της **μαγνητικής επαγωγής** $\vec{B}$ το οποίο είναι αντίστοιχο της ηλεκτρικής έντασης του ηλεκτροστατικού πεδίου. Έστω ότι φορτίο q κινείται μέσα στο μαγνητικό πεδίο με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$. Αποδεικνύεται πειραματικά ότι πάνω στο q ασκείται μία δύναμη $\vec{F}$ (**δύναμη Lorentz**) που δίνεται από τον τύπο: $\vec{F} = q\vec{\upsilon}\times\vec{B}$

Η παραπάνω μπορεί να γενικευθεί στην περίπτωση ενός αγωγού που διαρρέεται από ρεύμα *I*, και που υφίσταται μέσα σε μαγνητικό πεδίο επαγωγής $\vec{B}$ :

$$\vec{F} = \int_L I d\vec{\ell}\times\vec{B}$$

Ως ορισμός της $\vec{B}$ χρησιμοποιείται ο πειραματικά ελεγμένος **νόμος του Biot-Savart.** Έστω **κλειστός** ρευματοφόρος αγωγός C που διαρρέεται από ρεύμα I. Έστω $d\vec{\ell}'$ το στοιχειώδες διάνυσμα μήκους επάνω στον αγωγό C και έστω $\vec{r}'$ το διάνυσμα θέσης του ως προς κάποιο σημείο αναφοράς Ο. Έστω $\vec{R} \equiv \vec{r} - \vec{r}'$ και $\hat{R} \equiv \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}$.

Τότε : $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\oint_C \frac{I d\vec{\ell}'\times\hat{R}}{|\vec{R}|^2}$

● Για τη μαγνητική επαγωγή $\vec{B}$ ισχύει ο **μαγνητικός νόμος Gauss:**

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0$$

που συνεπάγεται ότι για οποιοδήποτε διάνυσμα μαγνητικής επαγωγής $\vec{B}$ υπάρχει ένα αντίστοιχο διάνυσμα $\vec{A}$, οποίο ονομάζεται **μαγνητικό δυναμικό**, για το οποίο ισχύει η σχέση: $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$

**Κυκλοφορούν :**
**Ηλεκτρομαγνητικά Πεδία Ι**
**Λυμένα Θέματα**
**Επιμέλεια Ι.Π. Κρόκου**
**σε όλα τα κεντρικά βιβλιοπωλεία**

● Ορίζουμε μαγνήτιση $\vec{M}$ ενός υλικού τη μαγνητική διπολική ροπή ανά μονάδα όγκου. Στο υλικό εμφανίζονται δέσμια ρεύματα μαγνήτισης.

**1.** χωρικά με πυκνότητα : $\vec{J}_m = \nabla\times\vec{M}$ και

**2.** επιφανειακά με πυκνότητα :

$$\vec{K}_m = \vec{M}\times\hat{n}\Big|_S$$

όπου $\hat{n}$ το μοναδιαίο κάθετο στην επιφάνεια S με φορά προς το εξωτερικό της περιοχής όπου υπάρχει μαγνήτιση.

Ορίζουμε : $\vec{H} = \frac{1}{\mu_o}\vec{B} - \vec{M}$

Ο νόμος του Ampere για το $\vec{H}$ σε διαφορική και ολοκληρωτική μορφή είναι αντίστοιχα:

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J}_{free}$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = I_{free}$$

όπου $\vec{J}_{free}$ και $I_{free}$ η χωρική πυκνότητα και το ρεύμα αντίστοιχα που οφείλονται μόνο στα ελεύθερα ρεύματα.

Ένα υλικό όπου η μαγνήτιση και το $\vec{H}$ ικανοποιούν τη σχέση :

$$\vec{M} = \chi_m\vec{H}$$

ονομάζεται **γραμμικό**. Η σταθερά αναλογίας $\chi_m$ ονομάζεται μαγνητική επιδεκτικότητα. Συνεπώς το $\vec{B}$ θα γράφεται ως εξής :

$$\vec{B} = \mu_o(\vec{H}+\vec{M}) = \mu_o(1+\chi_m\vec{H}) \quad ή$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \quad όπου \quad \mu = \mu_o(1+\chi_m)$$

ονομάζεται διαπερατότητα του υλικού.

## 4. Ο ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΕΠΑΓΩΓΗΣ ΤΟΥ FARADAY

● Έστω κλειστός βρόχος C ο οποίος βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο επαγωγής $\vec{B}$. Έστω S η νοητή επιφάνεια που ορίζει ο βρόχος. Ορίζουμε ως **μαγνητική ροή** Ψ μέσα από την S το επιφανειακό ολοκλήρωμα.

$$\Psi = \iint_S \vec{B}\cdot d^2\vec{S}$$

Η γενική έκφραση του **νόμου του Faraday**:

$$U = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\cdot d^2\vec{S}$$

**(ολοκληρωτική μορφή)**, η **διαφορική μορφή** του οποίου γράφεται:

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

## 5. ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΑΥΤΕΠΑΓΩΓΕΣ

● Έστω φορτίο Q που εμφανίζεται σε κάποια διάταξη, αποτέλεσμα της ύπαρξης του οποίου είναι μία διαφορά δυναμικού V ανάμεσα σε κάποια χαρακτηριστικά σημεία της. Ονομάζουμε χωρητικότητα C της διάταξης το πηλίκο:

$$C \equiv Q/V$$

● Έστω ότι μία διάταξη διαρρέεται από ρεύμα I, το οποίο προκαλεί στην περιοχή την ύπαρξη ενός μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$. Έστω ότι μαγνητική ροή Ψ διέρχεται από τη διάταξη. Ονομάζουμε συντελεστή αυτεπαγωγής L το πηλίκο: $L \equiv \Psi/I$

## 6. ΙΣΧΥΣ-ΕΝΕΡΓΕΙΑ-ΔΥΝΑΜΕΙΣ

● Θεωρούμε σύστημα N αγωγών με φορτία $Q_i$ και δυναμικά $V_i$. Η συνολική δυναμική ηλεκτρική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} Q_i V_i$$

Η ηλεκτρική δύναμη αλληλεπίδρασης αποδεικνύεται ότι είναι:

$$\vec{F}_e = \begin{cases} \nabla W_e & αν\, V_i = σταθερό,\ i = 1,....,N \\ -\nabla W_e & αν\, Q_i = σταθερό, i = 1,....,N \end{cases}$$

● Θεωρούμε σύστημα N κυκλωμάτων με πεπλεγμένες ροές $\Psi_i$ και ρεύματα $I_i$: Η μαγνητική δυναμική ενέργεια του συστήματος θα είναι:

$$W_m = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\Psi_i I_i$$

Η μαγνητική δύναμη αλληλεπίδρασης αποδεικνύεται ότι είναι :

$$\vec{F}_m = \begin{cases} \nabla W_m & (αν\, I_i = σταθερό, i = 1,....,N) \\ -\nabla W_m & (αν\, \Psi_i = σταθερά\, i = 1,....,N) \end{cases}$$

## 7. ΧΡΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΑ ΠΕΔΙΑ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ MAXWELL

● Στα χρονομεταβλητά πεδία εξακολουθούν να ισχύουν οι δύο νόμοι Gauss, καθώς και ο νόμος Επαγωγής του Faraday. Δεν ισχύει όμως ο νόμος του Ampere, ο οποίος πρέπει να διορθωθεί κατά την ποσότητα $\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ (ρεύμα μετατόπισης) ως εξής:

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

● Οι οριακές συνθήκες γράφονται :

$$\hat{n}\times(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0}$$

$$\hat{n}\times(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{\mathcal{K}}$$

$$\hat{n}\cdot(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma$$

$$\hat{n}\cdot(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$

$$\hat{n}\cdot(\vec{J}_2 - \vec{J}_1) = -\frac{\partial\sigma}{\partial t} - \nabla\cdot\vec{K}$$

● Το διάνυσμα Poynting ορίζεται από την

$$\vec{N} \equiv \vec{E}\times\vec{H}$$

και εκφράζει τη ροή ενέργειας ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα επιφάνειας κάθετα τοποθετημένης στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος.