

## ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### 2<sup>ου</sup> ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

1. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α.  $\lim_{x \rightarrow -1} (3x^3 - 4x + 8)$

β.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 - 8}{x - 2}$

γ.  $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x + 6}$

Λύση:

**Απλές περιπτώσεις**  
**Εφαρμόζουμε τις ιδιότητες των ορίων. Ουσιαστικά**  
**κάνουμε αντικατάσταση.**

α.  $\lim_{x \rightarrow -1} (3x^3 - 4x + 8) = 3(-1)^3 - 4(-1) + 8 = -3 + 4 + 8 = 9$

β.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 - 8}{x - 2} = \frac{3 \cdot 0^3 - 8}{0 - 2} = 4$

γ.  $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x + 6} = \sqrt{3 + 6} = 3$

2. Αν  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -3$  και  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 4$ . Να βρείτε τα όρια:

α.  $\lim_{x \rightarrow a} (3 \cdot f(x) - 4 \cdot g(x))$

β.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \cdot f(x) + g(x)}{\sqrt{g(x)}}$

Λύση:

**Εφαρμόζουμε τις ιδιότητες των ορίων.**

α.  $\lim_{x \rightarrow a} (3 \cdot f(x) - 4 \cdot g(x)) = 3 \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) - 4 \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) =$

$$3(-3) - 4 \cdot 4 = -9 - 16 = -25$$

β. **Επειδή  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 4 > 0$  η συνάρτηση  $g(x)$  παίρνει θετικές τιμές σε περιοχή του  $a$  και έτσι η  $\sqrt{g(x)}$  ορίζεται καλά.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{2 \cdot f(x) + g(x)}{\sqrt{g(x)}} &= \frac{\lim_{x \rightarrow \alpha} (2 \cdot f(x) + g(x))}{\lim_{x \rightarrow \alpha} \sqrt{g(x)}} = \frac{2 \cdot \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) + \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)}} = \\ &= \frac{2(-3) + 4}{\sqrt{4}} = \frac{-6 + 4}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{aligned}$$

3. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4}$

β.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+4x-5}{x-1}$

γ.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3+x-30}{x-3}$

Λύση:

**Στις περιπτώσεις ρητών συναρτήσεων της μορφής:**

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

όπου  $g(x), h(x)$  πολυώνυμα του  $x$  και το  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$  καταλήγει στη

μορφή  $\frac{0}{0}$ , τότε σίγουρα το  $\alpha$  είναι ρίζα των πολυωνύμων και αυτά

γράφονται με τη μορφή:

$$g(x) = (x - \alpha)g_1(x) \quad \text{και} \quad h(x) = (x - \alpha)h_1(x)$$

με συνέπεια το κλάσμα να απλοποιείται.

α.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$

β.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+4x-5}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+5)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+5) = 6$

γ. Το πολυώνυμο  $g(x) = x^3 + x - 12$  έχει ρίζα το 3. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner:

1	0	1	-30	3
	3	9	30	
1	3	10	0	

παραγοντοποιούμε:

$$g(x) = (x - 3)(x^2 + 3x + 10)$$

Επομένως το όριο γράφεται:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 + x - 30}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x^2 + 3x + 10)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 3x + 10) = 28$$

4. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α.  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - x - 1}{10x + 5}$

β.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^4 - 16}$

γ.  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{5x + 15}$

Λύση:

**Ταυτότητες που «παραγοντοποιούν»**

\*  $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$       \*  $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$

\*  $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$

\*  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2)$

όπου  $\rho_1, \rho_2$  οι ρίζες της εξίσωσης  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$

α. Οι ρίζες της εξίσωσης:

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

είναι:

$$\Delta = 9, \quad \rho_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2 \cdot 2} = \begin{cases} \rho_1 = 1 \\ \rho_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{2x^2 - x - 1}{10x + 5} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{2(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)}{10\left(x + \frac{1}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{2(x-1)}{10} = \frac{2\left(-\frac{1}{2} - 1\right)}{10} = \frac{-3}{10} = -0,3$$

$$\beta. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^4 - 16} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2^3}{(x^2)^2 - 4^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 2^2)}{(x^2 - 4)(x^2 + 4)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)(x+2)(x^2 + 4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{(x+2)(x^2 + 4)} = \frac{4 + 4 + 4}{4(4 + 4)} = \frac{3 \cdot 4}{4 \cdot 8} = \frac{3}{8}$$

$$\gamma. \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{5x + 15} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x^2 - 3x + 3^2)}{5(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 3x + 9}{5} = \frac{27}{5}$$

5. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

$$\alpha. \quad \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$$

$$\beta. \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x-1} - 3}{x - 5}$$

$$\gamma. \quad \lim_{x \rightarrow -6} \frac{x + 4 + \sqrt{10+x}}{x^2 - 36}$$

Λύση:

**Συζυγείς παραστάσεις**

$$\begin{array}{ll} \star \quad \sqrt{A+B} \rightarrow \sqrt{A-B} & \star \quad \sqrt{A-B} \rightarrow \sqrt{A+B} \\ \star \quad \sqrt{A}-\sqrt{B} \rightarrow \sqrt{A}+\sqrt{B} & \star \quad \sqrt{A}+\sqrt{B} \rightarrow \sqrt{A}-\sqrt{B} \end{array}$$

**Αν η ύπαρξη μιας ρίζας αποτελεί εμπόδιο για την παραγοντοποίηση του κλάσματος, πολλαπλασιάζουμε και τους δυο όρους του κλάσματος με την συζυγή παράσταση.**

$$\alpha. \quad \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x}^2 - 3^2}{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 9}{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{\sqrt{x} + 3} = \frac{1}{\sqrt{9} + 3} = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} \beta. \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{2x-1}-3)(\sqrt{2x-1}+3)}{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x-1}^2 - 3^2}{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x-1-9}{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x-10}{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2(x-5)}{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2}{\sqrt{2x-1}+3} = \frac{2}{3+3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma. \quad \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x+4+\sqrt{x+10}}{x^2-36} &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(x+4+\sqrt{x+10})(x+4-\sqrt{x+10})}{(x^2-36)(x+4-\sqrt{x+10})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(x+4)^2 - \sqrt{x+10}^2}{(x^2-36)(x+4-\sqrt{x+10})} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2+8x+16-(x+10)}{(x^2-36)(x+4-\sqrt{x+10})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2+7x+6}{(x^2-36)(x+4-\sqrt{x+10})} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(x+6)(x+1)}{(x-6)(x+6)(x+4-\sqrt{x+10})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x+1}{(x-6)(x+4-\sqrt{x+10})} = \frac{-6+1}{(-6-6)(-6+4-\sqrt{-6+10})} = \frac{-5}{48} \end{aligned}$$

6. Να βρείτε τα όρια:

$$\alpha. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{2-\sqrt{3+x}}$$

$$\beta. \quad \lim_{x \rightarrow 24} \frac{\sqrt{x+1}-5}{\sqrt{x-8}-x+20}$$

Λύση:

**Στην άσκηση αυτή, εμφανίζονται ριζικά και στους δυο όρους του κλάσματος. Θα πολλαπλασιάσουμε και τους δυο όρους του κλάσματος με τις συζυγείς παραστάσεις του αριθμητή και του παρονομαστή.**

$$\alpha. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{2-\sqrt{3+x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(2+\sqrt{3+x})}{(2-\sqrt{3+x})(\sqrt{x}+1)(2+\sqrt{3+x})} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2+\sqrt{3+x})}{[4-(3+x)](\sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2+\sqrt{3+x})}{(1-x)(\sqrt{x+1})} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(2+\sqrt{3+x})}{\sqrt{x+1}} = \frac{-4}{2} = -2
 \end{aligned}$$

β.  $\lim_{x \rightarrow 24} \frac{\sqrt{x+1}-5}{\sqrt{x-8}-x+20} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 24} \frac{(\sqrt{x+1}-5)(\sqrt{x+1}+5)[\sqrt{x-8}+(x-20)]}{[\sqrt{x-8}-(x-20)](\sqrt{x+1}+5)[\sqrt{x-8}+(x-20)]} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 24} \frac{[\sqrt{x+1}^2-5^2][\sqrt{x-8}+x-20]}{[\sqrt{x-8}^2-(x-20)^2](\sqrt{x+1}+5)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 24} \frac{(x-1-25)[\sqrt{x-8}+x-20]}{[x-8-(x^2-40x+400)](\sqrt{x+1}+5)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 24} \frac{(x-24)[\sqrt{x-8}+x-20]}{(-x^2+41x-408)(\sqrt{x+1}+5)} = \ell$$

Επειδή γνωρίζουμε  
 ότι το τριώνυμο:  
 $-x^2 + 41x - 408$   
 έχει ρίζα το 24, μπορούμε  
 να παραγοντοποιήσουμε με  
 Horner.

-1	41	-408	24
	-24	408	
-1	17	0	

Άρα το όριο γράφεται:

$$\ell = \lim_{x \rightarrow 24} \frac{(x-24)(\sqrt{x-8}+x-20)}{(x-24)(-x+17)(\sqrt{x+1}+5)} = \lim_{x \rightarrow 24} \frac{\sqrt{x-8}+x-20}{(-x+17)(\sqrt{x+1}+5)} = \frac{4+4}{-7 \cdot 10} = -\frac{4}{35}$$

7. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & x < 2 \\ 2x+1, & x \geq 2 \end{cases}$$

Να υπολογίσετε τα πλευρικά όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

Λύση:

**Η έκφραση  $x \rightarrow 2^-$  σημαίνει ότι:  $x \rightarrow 2$  και  $x < 2$   
ενώ η έκφραση  $x \rightarrow 2^+$  σημαίνει ότι:  $x \rightarrow 2$  και  $x > 2$**

Παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (1-x^2) = 1-4 = -3$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x+1) = 4+1 = 5$$

Επειδή:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

Δεν υπάρχει το όριο  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

8. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \leq 3 \\ 4x-2, & x > 3 \end{cases}$$

Να βρείτε τα πλευρικά όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$$

Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ .

Λύση:

Παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2+1) = 3^2+1 = 10$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (4x-2) = 4 \cdot 3 - 2 = 10$$

Επειδή:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 10$$

Υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  και είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 10$$

9. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x + \frac{|x-5|}{x-5}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad x \neq 5$$

Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$

Λύση:

**Για να απαλείψουμε την απόλυτη τιμή, π.χ.  $|A(x)|$ , από μια έκφραση πρέπει να γνωρίζουμε τι τιμές (θετικές ή αρνητικές) παίρνει η εντός του απολύτου ποσότητα, στην προκειμένη περίπτωση η  $A(x)$ .**

**Αν  $A(x) > 0$  τότε  $|A(x)| = A(x)$ .**

**Αν  $A(x) < 0$  τότε  $|A(x)| = -A(x)$**

\* Αν  $x < 5$  τότε  $x - 5 < 0$ , άρα:

$$|x - 5| = -(x - 5) = -x + 5$$

\* Αν  $x > 5$  τότε  $x - 5 > 0$ , άρα:

$$|x - 5| = x - 5$$

Έτσι η συνάρτηση γράφεται:

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{-(x-5)}{x-5} = x-1, & \text{αν } x < 5 \\ x + \frac{x-5}{x-5} = x+1, & \text{αν } x > 5 \end{cases}$$

Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} (x-1) = 5-1 = 4$$

ενώ:

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} (x+1) = 5+1 = 6$$

Τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα, άρα δεν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ .

10. Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο:

$$f(x) = \frac{2x+3}{x^2-9}$$



Να βρείτε:

- α. Το πεδίο ορισμού της  $f$
- β. Το όριο  $\lim_{x \rightarrow -3} [(x+3) \cdot f(x)]$
- γ. Την τιμή που πρέπει να πάρει ο πραγματικός αριθμός  $\lambda$ , ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow -3} [(x+3) \cdot f(x)] = \lambda^3 - \frac{23}{8}$$

Λύση:

- α. Πρέπει  $x^2 - 9 \neq 0$ , άρα:  
 $x^2 \neq 9 \Leftrightarrow x \neq 3, x \neq -3$

Επομένως το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι:

$$A = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$$

- β. Είναι:

$$\begin{aligned} \ell &= \lim_{x \rightarrow -3} [(x+3) \cdot f(x)] = \lim_{x \rightarrow -3} \left[ (x+3) \cdot \frac{2x+3}{x^2-9} \right] = \lim_{x \rightarrow -3} \left[ (x+3) \cdot \frac{2x+3}{(x-3)(x+3)} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \left( \frac{2x+3}{x-3} \right) = \frac{-6+3}{-3-3} \Rightarrow \ell = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- γ. Θέλουμε να είναι:

$$\lim_{x \rightarrow -3} [(x+3) \cdot f(x)] = \lambda^3 - \frac{23}{8}$$

Άρα:

$$\frac{1}{2} = \lambda^3 - \frac{23}{8} \Leftrightarrow \lambda^3 = \frac{1}{2} + \frac{23}{8} \Leftrightarrow \lambda^3 = \frac{27}{8} \Leftrightarrow$$

$$\lambda = \frac{3}{2}$$

11. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 2\eta\mu x + 35, & x \leq \frac{\pi}{6} \\ \lambda^2 + x - \frac{\pi}{6}, & x > \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ) για τις οποίες υπάρχει το όριο  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} f(x)$ .

Λύση:

Παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^-} (2\eta\mu x + 35) = 2\eta\mu \frac{\pi}{6} + 35 = 2 \cdot \frac{1}{2} + 35 = 36$$

και

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^+} \left( \lambda^2 + x - \frac{\pi}{6} \right) = \lambda^2 + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \lambda^2$$

Για να υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} f(x)$ , πρέπει:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^-} f(x)$$

άρα:

$$\lambda^2 = 36 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 6 \quad \text{ή} \quad \lambda = -6$$

12. Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια στο σημείο  $x_0$  τις παρακάτω συναρτήσεις:

α.  $f(x) = \begin{cases} e^x + 2, & x \leq 0 \\ \ln(x+1) + 2x, & x > 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$

β.  $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2}, & x \neq -2 \\ -4, & x = -2 \end{cases} \quad x_0 = -2$

Λύση:

**Όταν θέλουμε να εξετάσουμε τη συνέχεια μιας συνάρτησης σε σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της, αρχικά βρίσκουμε αν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .**

**Αν το όριο δεν υπάρχει, η  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $x_0$ .**

**Αν το όριο υπάρχει, θα πρέπει στη συνέχεια να είναι:**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

α. Παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x + 2) = e^0 + 2 = 3$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(x+1) + 2x] = \ln(0+1) + 2 \cdot 0 = \ln 1 = 0$$

Επειδή:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

Δεν υπάρχει το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ . Επομένως η  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ .

β. Παρατηρούμε ότι:

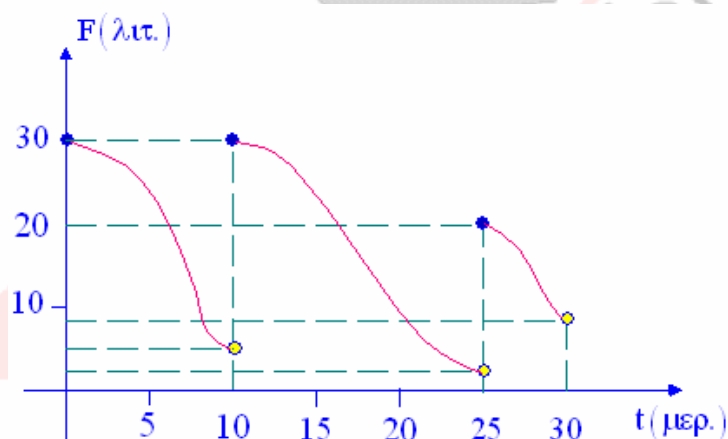
$$\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x - 2) = -4$$

Άρα ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = g(-2)$$

Επομένως η  $g$  είναι συνεχής στο  $x_0 = -2$ .

13. Στο παρακάτω διάγραμμα δείχνει την ποσότητα  $F$  της βενζίνης (σε λίτρα) σε σχέση με το χρόνο  $t$  (σε μέρες), στο ρεζερβουάρ ενός αυτοκινήτου, κατά τη διάρκεια ενός μήνα. Σε ποιες χρονικές στιγμές η συνάρτηση  $F$  είναι ασυνεχής. Τι μπορεί να συνέβει τότε;



Λύση:

Από το διάγραμμα  $F - t$  φαίνεται ότι:

$$\lim_{t \rightarrow 10^-} F(t) = 5 \quad \text{και} \quad \lim_{t \rightarrow 10^+} F(t) = 30$$

Άρα τη χρονική στιγμή  $t = 10$  η συνάρτηση  $F$  είναι ασυνεχής, αφού:

$$\lim_{t \rightarrow 10^-} F(t) \neq \lim_{t \rightarrow 10^+} F(t)$$

Το ίδιο συμβαίνει και τη χρονική στιγμή  $t = 25$ , διότι:



\* Ειδικότερα στο σημείο  $x_0 = 1$ , παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2 - x) = 2 - 1 = 1$$

Επειδή:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x)$$

Δεν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$ , επομένως δεν είναι συνεχής στο σημείο  $x_0 = 1$ .

15. Να εξηγήσετε γιατί η συνάρτηση:

$$f(x) = \eta\mu(x^2 + 9), \quad x \in \mathbb{R}$$

είναι συνεχής.

Λύση:

#### Υπενθύμιση

Αν δύο συναρτήσεις είναι συνεχείς και οι πράξεις που ορίζονται μεταξύ αυτών θα είναι συνεχείς.

Η συνάρτηση  $g(x) = x^2 + 9$ ,  $x \in \mathbb{R}$  είναι συνεχής ως πολυωνυμική. Επίσης και η συνάρτηση  $h(x) = \eta\mu x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  είναι συνεχής.

Επειδή:

$$f(x) = (h \circ g)(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

η  $f$  θα είναι επίσης συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

16. Για ποια τιμή του σταθερού πραγματικού αριθμού  $\alpha$  η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x + 5, & x < 1 \\ x^2 - 3x + 4, & x \geq 1 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .

Λύση:

Για  $x < 1$  η  $f(x) = \alpha x + 5$  είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

Για  $x > 1$  και η  $f(x) = x^2 - 3x + 4$  είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

Ειδικότερα στο  $x_0 = 1$  θα πρέπει να ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$



II. Για να είναι συνεχής στο  $x = 0$ , θα πρέπει:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

Όμως για  $\alpha = 4$ , είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -3$$

Άρα πρέπει:

$$-3 + \beta = -3 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\beta = 0}$$

