ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ & ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

Η επίγνωση του εν δυνάμει εφικτού

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Τυχαία μεταβλητή

Σ' ένα πείραμα τύχης όλα τα δυνατά αποτελέσματα δίνουν τον **δ.χ. Ω**. Αν σε κάθε σημείο (στοιχειώδες ενδεχόμενο) του **δ.χ.** αντιστοιχίσουμε έναν αριθμό, τότε έχουμε την συνάρτηση της **τυχαίας μεταβλητής (τ.μ.)** δηλαδή:

Χ (στοιχειώδες ενδεχόμενο) $\rightarrow$ x (τιμή)τ.μ.

Συνήθως το στοιχειώδες ενδεχόμενο Χ του **δ.χ.** ταυτίζεται με την τιμή της τ.μ. x δηλαδή Χ=x, γι' αυτό γράφουμε P(X=x).

Κατανομή πιθανότητας

Λέμε **κατανομή πιθανότητας** την συνάρτηση που, σε κάθε στοιχειώδες ενδεχόμενο του δ.χ. ενός πειράματος τύχης, μας δίνει την αντίστοιχη πιθανότητα (Σημειακά ή τοπικά).

- Η τ.μ. Χ λέγεται **διακριτή** όταν παίρνει τιμές από ένα πεπερασμένο ή αριθμήσιμο σύνολο.
- Η τ.μ. Χ λέγεται **συνεχής** όταν παίρνει τιμές σ' ένα διάστημα (α,β) $\subseteq$ R.

π.χ. 1ο Στην ρίψη ενός ζαριού η τ.μ. Χ είναι διακριτή και μπορεί να πάρει τις τιμές x=1, x=2,…,x=6.

π.χ. 2ο Από 100 προϊόντα παραγωγής της βιοτεχνίας Α ο αριθμός των ελαττωματικών είναι διακριτή τ.μ. Χ και μπορεί να πάρει τις τιμές x=0, x=1,…,x=99, x=100.

π.χ. 3ο Ο αριθμός των τηλ. κλήσεων σ' ένα κέντρο διανομής του ΟΤΕ σε μια ημέρα είναι διακριτή τ.μ. και μπορεί να πάρει τιμές x=0, x=1,…,x=n,…

π.χ. 4ο Το βάρος των γυναικών σε Kgr μιας πόλης είναι συνεχής τ.μ. Χ και μπορεί να πάρει τιμές π.χ. στο διάστημα [40,105].

π.χ. 5ο Το ύψος των φοιτητών σε cm του Ε.Α.Π. είναι συνεχής τ.μ. Χ και μπορεί να πάρει τιμές π.χ. στο διάστημα [153,201].

π.χ. 6ο Η διάρκεια ζωής λαμπτήρων σε h είναι συνεχής τ.μ. Χ και μπορεί να πάρει τιμές π.χ. στο διάστημα [950,2200].

ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ τ.μ.

- Αν η τ.μ. είναι διακριτή, τότε η συνάρτηση που δίνει την πιθανότητα η τ.μ.Χ να πάρει την τιμή x, λέγεται **συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.)** της Χ, συμβολίζεται με P(X=x)=f(x) και έχει τις ιδιότητες:

$$\boxed{f(x)\geq 0 \qquad \sum_{x_i\in\Omega} f(x_i)=1}$$

moda : Δείχνουμε ότι η f(x) είναι σ.π. όταν ισχύουν οι παραπάνω προϋποθέσεις.

- Η συνάρτηση F(x) που αθροίζει πιθανότητες από τα αριστερά (την πιο μικρή τιμή της τ.μ.) προς τα δεξιά μέχρι την θέση x λέγεται **αθροιστική συνάρτηση κατανομής ή συνάρτηση κατανομής (σ.κ.)** δηλαδή :

F(x)=P(X£x)= $\sum_{x_i\leq x} f(x_i)$ ή

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<x_1 \\ f(x_1) & x_1\leq x<x_2 \\ f(x_1)+f(x_2) & x_2\leq x<x_3 \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ 1 & x_n\leq x \end{cases}$$

Η **σ.κ.** είναι αύξουσα και ισχύουν :

$$\lim_{x\to-\infty} F(x)=0,\quad F(x)\geq 0,\quad \lim_{x\to+\infty} F(x)=1$$

Μέση τιμή

Το κέντρο βάρους *(παράμετρος θέσης)* δηλαδή το άθροισμα των γινομένων $x_i f(x_i)$: παρατήρηση (x_i) επί πιθανότητα-συντελεστή βάρους ($f(x_i)$) μας δίνει την **μέση τιμή μ** ή **μαθηματική ελπίδα** ή **προσδοκώμενη τιμή** ή **αναμενόμενη τιμή** δηλαδή :

$$\boxed{\mu=E(X)\underset{\text{ορσ}}{=}\sum_{x_i\in\Omega} x_i f(x_i)}$$

π.χ. 1ο Για τον **δ.χ.** Ω={3,5,6,7} με **σ.π.** P(x=3)=0,1, P(x=5)=0,4, P(x=6)=0,2, P(x=7)=0,3 η μέση τιμή είναι :

$$\mu=3\cdot P(3)+5P(5)+6P(6)+7P(7)=5{,}6$$

π.χ. 2ο Αν η σ.κ., για το ίδιο **δ.χ.** Ω είναι : P(x=3)=0,4, P(x=5)=0,2, P(x=6)=0,2, P(x=7)=0,2 η μέση τιμή είναι :

$$\mu_1=3\cdot P(3)+5P(5)+6P(6)+7P(7)=4{,}8$$

Παρατηρούμε ότι η μετατόπιση των πιθανοτήτων προς τα κάτω μετατοπίζει αντίστοιχα την μέση τιμή.

Διασπορά

Διασπορά είναι το άθροισμα των $(x_i-\mu)^2 f(x_i)$ δηλαδή: η διαφορά της παρατήρησης από την μέση τιμή στο τετράγωνο επί τον συντελεστή βάρους δηλαδή :

$$\sigma^2\underset{\text{σμβ}}{=}V(X)=E(X-\mu)^2=\sum_{x_i\in\Omega}(x_i-\mu)^2 f(x_i)$$

Τυπική ***απόκλιση*** *(παράμετρος απόκλισης)*

λέμε την : $\sigma=\sqrt{\sigma^2}>0$ η οποία δίνει το μέτρο της απόκλισης των παρατηρήσεων από την μέση τιμή.

Σχόλιο : Όσο μεγαλώνει η σ τόσο το σύνολο των παρατηρήσεών μας βρίσκεται μακρύτερα από την μέση τιμή και αντίστροφα.

Ροπές

Ροπή γύρω από την αρχή (μηδέν) :

κ - τάξης $m_\kappa=E(X^\kappa)=\sum_{x_i\in\Omega} x_i^\kappa f(x_i)$

Ροπή γύρω από το μέσο (μέση τιμή) :

κ - τάξης $\mu_\kappa=E(X-\mu)^\kappa=\sum_{x_i\in\Omega}(x_i-\mu)^\kappa f(x_i)$

Εκατοστιαία σημεία

Έστω η τ.μ. Χ με συνάρτηση κατανομής F(x), η οποία παίρνει τιμές στο [0,1]. Αν χωρίσουμε το διάστημα σε 100 ίσα μέρη, οι τιμές λέγονται **εκατοστιαία σημεία**.

π.χ. Για την τιμή x με F(x)=0,30 έχουμε το τριακοστό εκατοστιαίο σημείο, που συμβολίζεται με $x_{0,30}$ και ισχύει :

$$P(X\leq x_{0,30})=F(x_{0,30})=0{,}30$$

Σημαντικά εκατοστιαία σημεία:

$x_{0,25}$: **πρώτο τεταρτημόριο**

$x_{0,50}$: **διάμεσος**

$x_{0,75}$: **τρίτο τεταρτημόριο**

Η ποσότητα $x_{0,75}-x_{0,25}$ ονομάζεται **ενδο-τεταρτημοριακό** πλάτος.

ΣΥΝΕΧΕΙΣ Τ.Μ.

- Για τη συνεχή τ.μ. Χ που παίρνει τιμές στο διάστημα [α,β] ή το R, ορίζουμε συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) την f(x) με τις προϋποθέσεις :

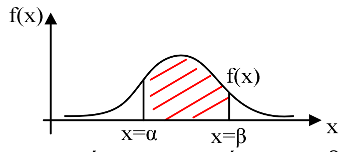
$$\boxed{f(x)\geq 0 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1}$$

Δείχνουμε ότι η f(x) είναι **σ.π.π.** όταν ισχύουν οι προηγούμενες προϋποθέσεις.

- Για τη συνεχή τ.μ. Χ η $P(X=x_i)\rightarrow 0$ αφού η ευνοϊκή περίπτωση είναι μια $X=x_i$ και οι δυνατές άπειρες.
- Η πιθανότητα αποκτά οντότητα για τιμές της τ.μ. Χ σ' ένα διάστημα [α,β].

Δηλαδή : P(α<X<β) ή $P(\alpha\leq X\leq\beta)$ και δίνεται από το ολοκλήρωμά της σ' αυτό :

$$\boxed{P(\alpha\leq X\leq\beta)=\int_\alpha^\beta f(x)dx}$$



- Γεωμετρικά αντιστοιχεί στο εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την f(x), τον x – άξονα και τις ευθείες x=α και x=β.

Σχόλια :

1ο Η f(x) λέγεται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας **σ.π.π.** διότι στη θέση x_i η τιμή της $f(x_i)$ δηλώνει τη συγκέντρωση πιθανοτήτων στη γύρω περιοχή.

2^{o} Για την εύρεση πιθανότητας στις διακριτές τ.μ. έχουμε άθροισμα και στις συνεχείς τ.μ. ορισμένο ολοκλήρωμα.

3^{o} Στη συνεχή τ.μ. η μια τιμή δεν δίνει πιθανότητα οπότε :

$$\boxed{P(\alpha \le X \le \beta) = P(\alpha < X < \beta) = P(\alpha \le X \le \beta)}$$

4^{o} Ας ξεκαθαρίσουμε ότι το εμβαδόν μεταξύ της f(x) και του x-άξονα είναι 1 τετρ. μονάδα, η τιμή του γενικευμένου ολοκληρώματος.

Συνάρτηση Κατανομής

Για την τ.μ. x με σ.π.π. f(x) αν πάρουμε το ολοκλήρωμα από το $-\infty$ μέχρι τη θέση X=x έχουμε την F(x) συνάρτηση κατανομής $F(x): R \to [0,1]$.

$$\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt}$$

Για την F(x) ισχύουν :

1^{o} Η σ.κ. είναι αύξουσα και :

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \quad F(x) \ge 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$$

2^{o} Η συνάρτηση κατανομής F(x) λέγεται και **αθροιστική** συνάρτηση κατανομής αφού αθροίζει πιθανότητες.

3^{o} Η τιμή F(α) δηλώνει πιθανότητα :

$$\boxed{F(\alpha) = P(X \le \alpha)}$$

4^{o} $P(\alpha \le X \le \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$

5^{o} Για τα σημεία που η f(x) είναι συνεχής

Ισχύει : $\boxed{F'(x) = \dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)}$

Όσα γράφονται στη συνέχεια είναι αντίστοιχα με αυτά των διακριτών τ.μ. όπου το άθροισμα (Σ) αντικαθίσταται με το ολοκλήρωμα ($\int$).

Μέση τιμή

Όπως στις διακριτές τ.μ. έτσι και στις συνεχείς τ.μ. η μέση τιμή (παράμετρος θέσης) ή αναμενόμενη τιμή είναι :

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

π.χ. Δίνουμε στη συνέχεια σ.π.π. f(x) με τη γραφική παράστασή τους την μέση τιμή μ και την τυπική απόκλιση σ.

Αν η τ.μ. Χ είναι συνεχής με σ.π.π. f(x) και Y=g(X) συνάρτηση της X, τότε :

$$E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

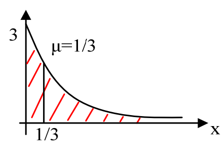
Διασπορά

$$\sigma^2 = V(X) = E(X-\mu)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$$

Η παράμετρος απόκλισης – τυπική απόκλιση είναι : $\sigma=\sqrt{\sigma^2}>0$ και δίνει το μέτρο της συγκέντρωσης γύρω από την μέση τιμή. Δηλαδή όσο μεγαλώνει η σ τόσο αυξάνονται οι πιθανότητες να' χουμε παρατηρήσεις μακρύτερα της μέσης τιμής.

π.χ. 1^{o} Για την εκθετική κατανομή με σ.π.π. $f(x) = 3e^{-3x}$ για x>0

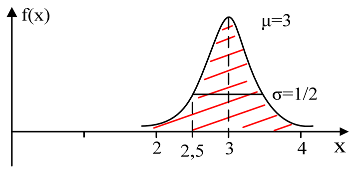
μ=1/3 και $\sigma^2 = \dfrac{1}{3^2}$ (σ=1/3).



Η μετατόπιση της τ.μ. Χ κατά α μετατοπίζει και την μέση τιμή E(X) κατά α.

π.χ. 2^{o} Για την κανονική κατανομή (συμμετρική) με σ.π.π. $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-2(x-3)^2}$, $x \in R$

με μέση τιμή μ=3 και σ=1/2



Ροπές

Ροπή γύρω από την αρχή κ-τάξης :

$$m_\kappa = E(X^\kappa) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^\kappa f(x)dx$$

Ροπή γύρω από τη μέση τιμή κ-τάξης :

$$\mu_\kappa = E(X-\mu)^\kappa = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^\kappa f(x)dx$$

Συντελεστής ασυμμετρίας

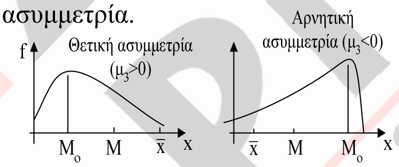
Ορίζουμε συντελεστή ασυμμετρίας ή λοξότητα της κατανομής το :

$$\boxed{\beta_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}}$$

Όταν μ_3=0 τότε β_1=0 οπότε η κατανομή είναι συμμετρική (βλέπε παραπάνω σχήμα).

Όταν μ_3>0 και $\beta_1 \ne 0$ τότε έχουμε θετική ασυμμετρία.

Όταν μ_3<0 και $\beta_1 \ne 0$ τότε έχουμε αρνητική ασυμμετρία.

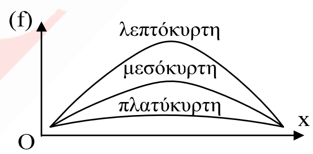


Συντελεστής Κύρτωσης

Ορίζουμε συντελεστή κύρτωσης της κατανομής το :

$$\boxed{\beta_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}}$$

- Όταν β_2=3 η κατανομή είναι κανονική (μεσόκυρτη).
- Όταν β_2>3 η κατανομή είναι λεπτόκυρτη.
- Όταν β_2<3 η κατανομή είναι πλατύκυρτη



Ιδιότητες μέσης τιμής και διασποράς

$1^{η}$ E(α)=α, $\alpha \in R$
Η μέση τιμή της σταθεράς είναι η ίδια.

$2^{η}$ E(αX)= αE(X)
Αν η τ.μ. Χ πολλαπλασιαστεί με τη σταθερά α τότε και η μέση τιμή πολλαπλασιάζεται με α.

$3^{η}$ E(X+α)=E(X)+α, $\alpha \in R$

$4^{η}$ E(X+Y)=E(X)+E(Y) όπου X,Y τ.μ.

$5^{η}$ $V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$ ή

$$\boxed{\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2}$$

Συμβουλή : Η σχέση χρησιμοποιείται όταν δίνεται η ροπή $2^{ης}$ τάξης $E(X^2)$.

$6^{η}$ V(X+α)=V(X)
Η μετατόπιση δεν επηρεάζει την διασπορά αφού σαν παράμετρος θέσης είναι ανεξάρτητη του συστήματος αναφοράς και η τιμή της αναφέρεται ως προς την μέση τιμή.

$7^{η}$ $V(\alpha X)=\alpha^2 V(X)$

προφανώς $\boxed{V(\alpha X+\beta) = \alpha^2 V(X)}$

$8^{η}$ Αν οι τ.μ. X,Y είναι ανεξάρτητες τότε :
E(XY)=E(X)E(Y)
$V(X \pm Y)=V(X)+V(Y)$

Παρατηρούμε ότι οι διακυμάνσεις προστίθενται είτε έχουμε πρόσθεση των τ.μ. είτε αφαίρεση αφού δηλώνουν μέτρο απόκλισης.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

(Αλλαγή μεταβλητής τ.μ.)

Έστω η τ.μ. X που ακολουθεί την κατανομή με σ.π.π. f(x). Για να βρεθεί η σ.π.π. της τ.μ. Y με Y=g(X), ακολουθούμε τα βήματα :

- Από το διάστημα ορισμού της τ.μ. X, Δ_1, και την y=g(x), βρίσκουμε το διάστημα Δ_2 που ορίζεται η τ.μ. Y.
- Επιλύουμε την Y=g(X) ως προς x : $x=g^{-1}(y)$. (η y=g(x) είναι 1-1 στο π.ο.)
- Από την συνάρτηση κατανομής της τ.μ. y ;

$$F_Y(y) = P(Y \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{g^{-1}(y)} f(x)dx$$

Παραγωγίζοντας παίρνουμε την σ.π.π. $f_y(y)$:

$$\boxed{f_Y(y) = f[g^{-1}(y)] \cdot \frac{d}{dy}[g^{-1}(y)]}$$

Εφόσον : $\dfrac{d}{dy}[g^{-1}(y)] > 0$. Αν όχι, τότε παίρνουμε την αντίθετη τιμή (θετική).